

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

И.Д. НОВИКОВ
В.П. ФРОЛОВ

ФИЗИКА ЧЕРНЫХ ДЫР



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.66
Н23
УДК 524.359

Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. — М.: Наука.
Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986, 328 с.

Излагается современное состояние проблемы физики черных дыр — объектов, возникающих в результате катастрофического сжатия небесных тел. Авторы охватывают все аспекты проблемы — от теории пространства-времени самих черных дыр, механики движения тел, распространения полей в их окрестности до физических процессов в них, свойств вакуума и значения черных дыр в астрофизике.

Для физиков и астрономов — специалистов, аспирантов и студентов старших курсов.

Табл. 5 Ил. 89 Библиогр. 631 назв.

Рецензенты: академик *М.А. Марков*,
доктор физико-математических наук *Ю.С. Владимиров*

"... и откуда берутся такие возможности, если у нас только — дыры?!"

Петер Вайс. Преследование и убийство Жан-Поля Марата. — В кн.: Из немецкой поэзии. Век X — век XX. — М.: Худ. лит., 1979

Одним из наиболее удивительных предсказаний теории тяготения Эйнштейна является возможность существования черных дыр — объектов, обладающих столь сильным гравитационным полем, что никакие физические тела, никакие сигналы не могут вырваться из них наружу. Хотя черные дыры с полной достоверностью пока еще не открыты, имеются серьезные основания считать, что некоторые из исследуемых в настоящее время астрофизиками объектов являются черными дырами. Доказательство существования черных дыр и исследование их свойств имели бы значение, далеко выходящее за рамки астрофизики, поскольку речь идет не об открытии еще одного, быть может, довольно удивительного астрофизического объекта, а о проверке правильности наших представлений о свойствах пространства и времени в экстремально сильных гравитационных полях.

Теоретические исследования свойств черных дыр и возможных следствий гипотезы об их существовании особенно интенсивно развивались с начала 70-х годов. Наряду с изучением тех особенностей черных дыр, которые важны для понимания их возможных астрофизических проявлений, теория позволила обнаружить ряд неожиданных закономерностей, присущих физическим взаимодействиям с участием черных дыр.

В настоящее время имеется довольно полное понимание свойств черных дыр, их возможных астрофизических проявлений и особенностей протекания различных физических процессов в черных дырах. Помимо этого была установлена глубокая связь теории черных дыр с такими, на первый взгляд далекими, областями, как термодинамика, теория информации и квантовая теория. За последние два десятилетия на стыке теории гравитации, астрофизики, классической и квантовой теории поля возник и, по сути дела, оформился, как самостоятельное научное направление, раздел физики, получивший название физики черных дыр.

Цель настоящей книги познакомить читателя с физикой черных дыр, с методами, которые в ней используются, и с основными результатами этой относительно молодой и быстро развивающейся области физики. При этом основное внимание сосредоточивается на вопросах, которые были решены сравнительно недавно и не вошли еще с достаточной полнотой в учебники и обзоры^{*}), а то, что известно достаточно давно, мы постарались изложить кратко (но ясно).

^{*}) Отдельные аспекты физики черных дыр рассматривались, например, в следующих обзорах: Марков (1970, 1973^{*}), Пенроуз (1973^{*}), Картер (1973а), Де Витт (1975).

Мы старались сделать изложение доступным не только специалистам, но и широкому кругу физиков и астрофизиков, не имеющих специальных знаний в области физики черных дыр.

Авторы везде прежде всего пытались объяснить именно физическую суть явлений, лишь затем переходя к математическим методам их описания. Эти цели в основном определили как характер отобранного материала, так и стиль изложения. Авторы стремились избежать излишней строгости при формулировке и доказательстве различных теорем о черных дырах. Зачастую вместо полного доказательства приводится лишь его основная идея, его последовательные этапы и дается ссылка на оригинальные работы, где есть подробное доказательство. Это связано не столько с тем, что имеются прекрасные монографии Пенроуза (1968), Хокинга, Эллиса (1973) и Чандрасекара (1983), в значительной мере покрывающие опущенный материал, как с тем, что излишняя строгость, на наш взгляд, затрудняет понимание физических идей, лежащих в основе тех или иных свойств черных дыр.

Мы вынуждены были почти полностью опустить материал, связанный с астрофизическими аспектами теории черных дыр. Ограниченный объем не позволил включить в настоящую монографию сколь-нибудь полного обзора относящихся к этой теме вопросов, которые сами по себе вполне могли бы стать предметом отдельной книги. Мы и здесь ограничились ссылками на оригинальные работы.

Мы пользуемся случаем поблагодарить редактора книги И.Г. Вирко за помощь при подготовке рукописи к печати.

*И.Д. Новиков
В.П. Фролов*

Сексл (1975), Зельдович и др. (1976*), Шьяма (1976), Фролов (1976*б, 1978*, 1983б), Руффини (1979), Бекенштейн (1980), Израэль (1983), Дымникова (1986*). (Здесь и далее при цитировании работ, опубликованных на русском языке, год публикации отмечен звездочкой.)

ВВЕДЕНИЕ

Черной дырой называют область пространства-времени, в которой гравитационное поле настолько сильно, что не позволяет даже свету покинуть эту область и уйти в бесконечность.

Черная дыра образуется при сжатии тела с массой M до размеров, меньших так называемого *гравитационного радиуса* — величины $r_g = 2GM/c^2$ (G — постоянная тяготения Ньютона, c — скорость света). Скорость, необходимая для того, чтобы улететь в бесконечность с границы черной дыры (вторая космическая скорость), равна скорости света. Если учесть, что скорость света является предельной для скорости распространения физических сигналов, то нетрудно прийти к выводу о невозможности выхода наружу сигналов и частиц из области, лежащей внутри черной дыры. В рамках классической теории тяготения Эйнштейна этот вывод носит абсолютный характер, поскольку гравитационное взаимодействие является универсальным. В роли гравитационного заряда выступает масса, значение которой пропорционально полной энергии системы. Поэтому все объекты, обладающие энергией, участвуют в гравитационном взаимодействии.

Для описания черных дыр необходимо в полной мере использовать теорию гравитации Эйнштейна — общую теорию относительности (ОТО)*. На первый взгляд сложность этих уравнений, связанная, в частности, с их существенной нелинейностью, не позволяет надеяться на сколь-нибудь полное описание черных дыр и их свойств. Оказалось, однако, что по прошествии короткого времени после своего образования всякая черная дыра становится стационарной и ее гравитационное поле однозначно определяется малым числом параметров: ее массой и угловым моментом, а также значением электрического заряда (при наличии последнего). Физическая причина столь удивительного свойства черных дыр состоит в том, что только конфигурации физических полей (в том числе и гравитационного) весьма специального вида могут быть стационарными в исключительно сильном поле черной дыры.

Поскольку сигналы не могут выйти из черной дыры, а физические тела и излучение могут в нее падать, поверхность черной дыры играет роль своеобразной мембраны, а граница черной дыры в пространстве-времени, называемая *горизонтом событий*, является световой поверхностью. Появление черной дыры означает возникновение нетривиальной причинной структуры

*) Относительно проблемы черных дыр в неэйнштейновских теориях гравитации см., например, Уилл (1981).

в пространстве-времени. Все эти особенности черных дыр приводят к тому, что изучение их взаимодействия с физическими полями и веществом, а также между собой потребовало развития новых методов.

Хотя само название "черные дыры" было введено Уилером лишь в 1968 г., вопрос о возможности существования подобных объектов в рамках ньютоновской теории обсуждался Митчелом и Лапласом еще в конце XVIII в. [см. об этом Бэрроу, Силк (1983), Новиков (1985*)]. В рамках ОТО с этой проблемой столкнулись, по сути дела, в год создания теории, после того как Шварцшильд (1916) получил первое точное (сферически-симметричное) решение уравнений Эйнштейна в пустоте. Это решение, помимо сингулярности в центре симметрии (при $r = 0$), обладало еще дополнительной особенностью на поверхности гравитационного радиуса (при $r = r_g$). Потребовалось более трети столетия, прежде чем в результате анализа "неожиданных" особенностей решения Шварцшильда, в котором принимали участие Фламм (1916), Вейль (1917), Эддингтон (1924), Леметр (1933), Эйнштейн, Розен (1935), наступило глубокое понимание структуры пространства-времени в сильном гравитационном поле и было получено полное решение рассматриваемой задачи [Синг (1950), Финкельштейн (1958), Фрондел (1959), Крускал (1960), Жекерес (1960), Новиков (1963*, 1964*a)]. На то, что этот интервал времени оказался таким длительным, по всей видимости, повлияло общее представление о невозможности существования в природе тел, размеры которых сравнимы с их гравитационным радиусом. Подобной точки зрения придерживался, в частности, сам создатель общей теории относительности. Однако в тридцатых годах после работ Ландау, Бааде, Цвикки и Оппенгеймера, в которых была показана возможность существования нейтронных звезд, чей размер лишь в несколько раз превосходит размер их гравитационного радиуса, интерес к свойствам сверхсжатых гравитационных систем сильно возрос. Картина гравитационного коллапса массивной звезды, приводящего к образованию черной дыры, была впервые описана Оппенгеймером и Снайдером (1939).

Следующий период относится к середине шестидесятых — началу семидесятых годов, когда после работ Синга, Крускала и других, в которых было получено полное решение для задачи Шварцшильда, и работы Керра (1963), обнаружившего решение, описывающее гравитационное поле вращающейся черной дыры, началось интенсивное теоретическое изучение общих свойств черных дыр и их классических взаимодействий. В это время были доказаны ставшие теперь классическими теоремы об "отсутствии волос" у черных дыр (т.е. об отсутствии каких-либо внешних индивидуальных признаков, кроме массы, момента импульса и заряда), о существовании сингулярности внутри них, о возрастании площади поверхности черных дыр. Эти и другие результаты позволили понять качественную картину образования черной дыры, ее возможной дальнейшей эволюции и ее взаимодействия с веществом и классическими физическими полями. Многие из этих результатов были подытожены в известных монографиях Мизнера, Торна, Уилера (1973) и Хокинга, Эллиса (1973).

В конце шестидесятых годов после открытия пульсаров (нейтронных звезд) перед астрофизиками с особой остротой встал вопрос о возможности обнаружения черных дыр. Анализ падения (аккреции) вещества на оди-

ночные черные дыры и на черные дыры, входящие в состав двойных систем, позволил предсказать, что аккрецирующие черные дыры могут быть мощными источниками рентгеновского излучения [Новиков, Зельдович (1966), Шкловский (1967*), Бербидж (1972)]. Развитие рентгеновской астрономии и исследования на рентгеновских спутниках, начатые в 70-е годы, позволили обнаружить ряд рентгеновских источников, один из которых, расположенный в созвездии Лебедя (Cyg X-1), по-видимому, является черной дырой.

Длительные исследования этого объекта, проводящиеся уже около 15 лет, дают все новые подтверждения сделанному предположению. В настоящее время имеется еще несколько подобных "кандидатов" в черные дыры. Кроме того, есть веские основания считать, что в ядрах активных галактик (а может быть, и во всех ядрах галактик) и в квазарах имеются сверхмассивные черные дыры [см. Блендфорд, Торн (1979), Рис (1982)].

Обсуждение вопросов, связанных с возможными наблюдательными проявлениями черных дыр, привлекло внимание к задачам о движении частиц и физических полей в пространстве-времени стационарных черных дыр.

К настоящему времени эта задача, носящая в основном математический характер и связанная с интегрированием уравнений геодезических и построением разложения по собственным функциям инвариантных волновых операторов в метрике Керра, в значительной части решена. Полученные здесь многочисленные результаты подытожены в появившейся недавно книге Чандрасекара (1983) "Математическая теория черных дыр".

Не успела затихнуть "сенсация", вызванная возможным обнаружением черной дыры, как новый неожиданный результат, полученный Хокингом (1974, 1975), снова привлек внимание физиков к черным дырам. Оказалось, что неустойчивость вакуума в сильном гравитационном поле черной дыры приводит к тому, что черные дыры являются источником излучения, и если их масса мала, они могли бы успеть распасться за время, меньшее времени жизни Вселенной. Подобные малые черные дыры, получившие название первичных, по-видимому, могли образовываться только на очень ранней стадии эволюции Вселенной [Зельдович, Новиков (1966*, 1967*), Хокинг (1971a)]. Обнаружение первичных черных дыр или доказательство отсутствия их или продуктов их распада позволяет в принципе получить ценную информацию о физических процессах, происходивших во Вселенной в то время.

Открытие Хокинга вызвало большое количество работ, в которых были исследованы особенности квантовых эффектов в черных дырах. Наряду с детальным описанием эффектов, связанных с рождением реальных частиц, вылетающих на бесконечность, в последние годы удалось значительно продвинуться в понимании эффекта поляризации вакуума вблизи черных дыр. Этот эффект важен для построения полного квантового описания "испаряющейся" черной дыры.

Данная книга посвящена систематическому изложению физики черных дыр. Содержание книги построено следующим образом.

Авторы стремились сделать весь материал в начале книги особенно доступным и простым, чтобы наглядно ввести некоторые важнейшие понятия и подчеркнуть основные проблемы. В первую очередь это относится к гл. 2.

В ней излагаются свойства простейшей сферической черной дыры. Здесь мы знакомим читателя и со свойствами пространства-времени внутри черной дыры.

В третьей главе рассмотрено распространение слабых физических полей в окрестности черных дыр. Особое внимание уделяется эволюции слабых гравитационных полей. Этот вопрос важен для проблемы устойчивости черной дыры относительно внешних возмущений, а также для проблемы излучения гравитационных волн телами (и полями), движущимися около черных дыр. Здесь же рассмотрен вопрос о возникновении черной дыры при коллапсе тела с малыми отклонениями от сферичности.

Четвертая глава посвящена знакомству с важнейшими свойствами вращающейся черной дыры, а также черной дыры, обладающей электрическим зарядом.

Пятая глава содержит изложение общей теории нестационарных черных дыр и результатов относительно существования сингулярностей в черных дырах.

В шестой главе приводится доказательство теоремы единственности для стационарных черных дыр.

Седьмая глава посвящена методам анализа электромагнитных полей вблизи стационарной черной дыры, основанным на "3 + 1"-разбиении пространства-времени.

В восьмой главе обсуждаются различные физические эффекты в поле черных дыр: суперрадиация, сдвиг собственной энергии заряженных частиц, взаимное превращение электромагнитных и гравитационных волн, а также движение и деформация черных дыр во внешнем поле и их взаимодействие друг с другом.

Девятая и десятая главы посвящены квантовой физике черных дыр. В девятой главе излагается общее решение задачи о рождении частиц в поле стационарной черной дыры. В десятой главе собраны результаты, касающиеся поляризации вакуума в окрестности черных дыр.

Термодинамическая аналогия в физике черных дыр обсуждается в одиннадцатой главе.

В двенадцатой главе рассмотрены вопросы, связанные со структурой пространства-времени внутри черных дыр.

В тринадцатой главе собран материал, относящийся к первичным черным дырам, теории белых дыр и полужамкнутых миров и возможной роли элементарных черных дыр в квантовой гравитации.

Книга заканчивается приложением, в котором излагаются некоторые сведения из римановой геометрии и общей теории относительности и приводятся важнейшие формулы, используемые в основном тексте.

Знаки в определениях ds^2 , тензора кривизны и тензора Риччи совпадают с выбором знаков в книге Мизнера, Торна, Уилера (1973). Во второй и третьей главах все формулы выписаны с размерными физическими константами c и G . Начиная с четвертой главы, где мы переходим к более сложному материалу и где выписывание размерных констант вело бы к слишком громоздким выражениям, мы везде (за исключением окончательных формул и оговоренных разделов) использовали систему единиц $c = G = \hbar = 1$.

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНАЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА

§ 2.1. Сферически-симметричное поле тяготения

Мы начнем рассмотрение физических свойств черных дыр с простейшего случая, когда сама черная дыра и ее гравитационное поле являются сферически-симметричными.

Сферически-симметричное гравитационное поле (пространство-время со сферическим 3-мерным пространством) описывается во всех учебниках по ОТО [см., например, Ландау, Лифшиц (1973*), Мизнер, Торн, Уилер (1973)]. Поэтому мы ограничимся лишь приведением здесь необходимых результатов. Напишем выражение для квадрата интервала вдали от сильных полей тяготения (т.е. там, где справедлива специальная теория относительности), используя сферическую пространственную систему координат (r, θ, φ) :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.1.1)$$

где c — скорость света, dl — расстояние в трехмерном пространстве.

Рассмотрим теперь искривленное пространство-время, сохраняя, однако, требование пространственной сферической симметрии. Пространство-время не обязательно пустое, в нем могут быть вещество и физические поля (разумеется, также сферически-симметричные, если мы учитываем их тяготение). Математика утверждает [см., например, Мизнер, Торн, Уилер (1973)], что интервал в этом случае всегда может быть записан (при подходящем выборе координат) в виде *)

$$ds^2 = g_{00}(x^0, x^1)dx^{0^2} + g_{11}(x^0, x^1)dx^{1^2} + (x^1)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.1.2)$$

В этом выражении отличны от нуля по-прежнему лишь те же компоненты метрического тензора, что и в выражении (2.1.1) для плоского пространства. Компоненты g_{00} и g_{11} зависят только от x^0 и x^1 и не зависят от θ и φ .

Координаты, в которых выражение для g_{22} записывается в виде $(x^1)^2$, носят название *координат кривизны*. Обычно для x^1 -координаты выбирают обозначение r [по аналогии с (2.1.1)], а для $x^0/c \equiv t$. Мы увидим в дальнейшем, что внутри черной дыры такой выбор обозначений не всегда логичен (см. § 2.4).

Если сферическое поле тяготения рассматривается не в пустоте, то в пространственной системе отсчета, определяемой координатами x^1, θ, φ ,

*) Строго говоря, метрика общего вида описывается выражением (2.1.6). Формула

(2.1.2) верна везде, за исключением особых поверхностей, где $\frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^0} = \frac{\partial \tilde{g}_{22}}{\partial x^1} = 0$.

вещество, вообще говоря, движется (радиально), т.е. имеются потоки энергии. Иногда удобно выбирать другие системы отсчета, например, сопутствующие (в которых нет потоков энергии) или какие-то другие (но сферически-симметричные). Все такие системы обладают следующим свойством. Точки, составляющие какую-либо систему, движутся по радиусу относительно другой системы. Связь между различными системами отсчета, сохраняющими свойства сферической симметрии, задается преобразованиями

$$\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0, x^1), \quad (2.1.3)$$

$$\tilde{x}^1 = \tilde{x}^1(x^0, x^1), \quad (2.1.4)$$

$$\tilde{\theta} = \theta, \quad \tilde{\varphi} = \varphi. \quad (2.1.5)$$

Тильда обозначает координаты в новой системе отсчета. Выражение (2.1.4) описывает радиальное движение точек новой системы отсчета (с координатами $\tilde{x}^1 = \text{const}$) относительно старой. После выбора (2.1.4), задающего новую систему отсчета, выбор (2.1.3), определяющий координату времени в новой системе, всегда может быть сделан таким образом, что компонента $\tilde{g}_{01}$ не появится и общее выражение для ds^2 будет иметь вид

$$ds^2 = \tilde{g}_{00}(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1) d\tilde{x}^{0^2} + \tilde{g}_{11}(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1) d\tilde{x}^{1^2} + \tilde{g}_{22}(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1) (d\tilde{\theta}^2 + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2). \quad (2.1.6)$$

Заметим, что выражение для $\tilde{g}_{22}$ может быть записано в виде

$$\sqrt{\tilde{g}_{22}} = x^1(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1), \quad (2.1.7)$$

где $x^1 = x^1(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1)$ есть решение (2.1.3), (2.1.4) относительно x^1 . Оно описывает радиальное движение точек старой системы (с координатами $x^1 = \text{const}$) относительно новой.

§ 2.2. Сферически-симметричное поле тяготения в вакууме

Рассмотрим теперь сферическое поле тяготения в вакууме. Решение уравнений Эйнштейна для этого случая было найдено Шварцшильдом (1916) и имеет следующий вид [см. Ландау, Лифшиц (1973*)]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (2.2.1)$$

G — постоянная тяготения Ньютона, M — масса источника поля.

Важнейшее свойство этого решения состоит в том, что оно не зависит от временной координаты t , а только от r , и определяется одним параметром M — полной массой тяготеющего источника, создающего поле. Даже если в источнике поля есть радиальные движения (сохраняющие сферическую симметрию), поле в вакууме, вне вещества, остается постоянным [это утверждение носит название *теоремы Биркгофа* (1923)]. Вдали от центра тяготения (при $r \rightarrow \infty$) пространство-время переходит в плоское пространство-время Минковского с метрикой (2.1.1). Координаты t, r, θ, φ , в которых записано выражение (2.2.1), носят название *координат*

Шварцшильда, а система отсчета, образуемая ими, — системы отсчета *Шварцшильда*. В малой окрестности каждой точки пространства можно ввести для обычных измерений длины локальную декартову систему координат (x, y, z) :

$$\delta x = \sqrt{g_{11}} dr = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2} dr, \quad (2.2.2)$$

$$\delta y = \sqrt{g_{22}} d\theta = r d\theta, \quad (2.2.3)$$

$$\delta z = \sqrt{g_{33}} d\varphi = r \sin \theta d\varphi. \quad (2.2.4)$$

Множитель $(1 - 2GM/c^2 r)^{-1/2}$ в (2.2.2) описывает искривленность трехмерного пространства.

Физическое время τ , текущее в данной точке r , определяется выражением

$$d\tau = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} dx^0 = \sqrt{-g_{00}} dt = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2} dt. \quad (2.2.5)$$

Вдали от центра тяготения (при $r \rightarrow \infty$) имеем $d\tau = dt$, т.е. t — это физическое время наблюдателя на бесконечности.

При меньших r время τ течет все медленнее по сравнению со временем t на бесконечности. При $r \rightarrow 2GM/c^2$ имеем $d\tau \rightarrow 0$.

Вычислим теперь ускорение свободного падения тела, первоначально покоящегося в системе Шварцшильда (или имеющего малую скорость $v \ll c$). Используя формулу (П. 63) (см. Приложение), находим

$$F = \sqrt{F_i F^i} = \frac{GM}{r^2 (1 - 2GM/c^2 r)^{1/2}}. \quad (2.2.6)$$

Ускорение направлено по радиусу. При $r \rightarrow 2GM/c^2$ ускорение становится бесконечным. Особенность течения времени при $r \rightarrow 2GM/c^2$ [см. (2.2.5)] и особенность в выражении для ускорения F [см. (2.2.6)] показывают, что в системе отсчета Шварцшильда при этом значении r имеется физическая особенность*). Значение $r = r_g \equiv 2GM/c^2$ называют *радиусом Шварцшильда* (или гравитационным радиусом; см. с. 5), а сферу с радиусом r_g — *сферой Шварцшильда*. Мы в дальнейшем подробно рассмотрим смысл физической особенности при $r = r_g$. Сейчас отметим следующее.

Система отсчета Шварцшильда статична, не деформируется [$g_{\alpha\beta}$ не зависят от t , $g_{0i} = 0$, $D_{ik} = 0$; см. (П.60)]. Она может мыслиться как координатная решетка, "сваренная" из невесомых жестких стержней, заполняющих пространство вокруг черной дыры. Мы можем изучать движение частиц по отношению к этой решетке, эволюцию физических полей в разных ее

*) Выражение (2.2.6) определяет ускорение, а $\mathcal{F}_0 = Fm$ — силу, действующую на тело массы m и измеряемую наблюдателем, расположенным рядом с этим телом в точке r_0 . Если тело удерживается невесомой, абсолютно жесткой нитью, то значение силы, прилагаемой к свободному концу нити в точке r_1 , будет равно

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \sqrt{\frac{g_{00}(r_0)}{g_{00}(r_1)}}.$$

При стремлении r_0 к $2GM/c^2$ $\mathcal{F}_0 \rightarrow \infty$, в то время как $\mathcal{F}_1$ остается конечной.

точках и т.д. Таким образом, решетка Шварцшильда в какой-то степени напоминает решетку жестких координат в неизменном ньютоновском пространстве нерелятивистской физики. Разумеется, геометрия 3-мерного пространства Шварцшильда вокруг тяготеющего центра неевклидова, в отличие от евклидова ньютоновского пространства нерелятивистской физики. Но в остальном свойства очень схожи*). Это помогает работе нашей интуиции.

Когда мы говорим о движении частиц в поле Шварцшильда, об эволюции полей, мы подразумеваем движение и эволюцию полей в этом аналоге абсолютного ньютоновского пространства**). Наличие критического радиуса в сферическом поле в вакууме $r_g = 2GM/c^2$, где ускорение свободного падения становится бесконечным, показывает, что для меньших $r \leq r_g$ такую жесткую, недеформирующуюся решетку продолжить нельзя, там уже нет недеформирующегося пространства — аналога ньютоновского пространства. Тот факт, что на r_g величина F обращается в бесконечность, подсказывает нам, что при $r \leq r_g$ все системы должны быть нежесткими в том смысле, что $g_{\alpha\beta}$ должны зависеть от времени, системы должны деформироваться (все тела должны падать к центру). Дальше мы убедимся, что так оно и есть в действительности.

Заметим, что указанные особенности не означают, что в геометрии 4-мерного пространства-времени имеется какая-либо сингулярность типа бесконечной кривизны и тому подобное. Мы увидим далее, что пространство-время здесь вполне регулярно и особенности на r_g означают физические особенности только в системе отсчета Шварцшильда, т.е. означают невозможность продолжить ее как жесткую, недеформирующуюся (не падающую к центру) при $r \leq r_g$.

В заключение отметим, что величина r_g крайне мала даже для небесных тел. Так, для массы, равной массе Земли, $r_g = 0,9$ см, для массы, равной массе Солнца, $r_g = 3$ км. При $r \gg r_g$ поле Шварцшильда есть обычное ньютоновское поле тяготения с ускорением свободного падения $F = GM/r^2$, а искривленность 3-мерного пространства крайне мала. Так как размеры обычных небесных тел (и вообще обычных тел) много больше r_g , то вне тел их поле тяготения есть ньютоновское поле***). Внутри этих тел решение Шварцшильда неприменимо и поле тяготения, разумеется, также с огромной точностью является ньютоновским.

Как мы увидим далее, сферическая черная дыра возникает, когда невращающееся сферическое тело сжимается до размеров меньше гравитационного радиуса. Но прежде чем рассмотреть этот процесс возникновения черной дыры, необходимо познакомиться с законами радиального движения пробных частиц в поле Шварцшильда.

*) В § 4.2 мы подробно рассмотрим эти вопросы.

**) Напомним, что в общем случае несферических полей тяготения, меняющихся во времени, никакого неизменного 3-мерного пространства ввести нельзя, что затрудняет и наглядные представления, и вычисления.

***)) Исклчением являются нейтронные звезды и черные дыры.

§ 2.3. Радиальное движение пробных частиц в поле Шварцшильда

Рассмотрим прежде всего движение вдоль радиуса фотона, всегда летящего с фундаментальной скоростью c . Практически по тому же закону будет двигаться любая ультрарелятивистская частица. Для такой частицы $ds = 0$. Для радиального движения $d\theta = d\varphi = 0$. Подставляя в (2.2.1) $ds = d\theta = d\varphi = 0$, находим закон движения

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_g}{r} \right). \quad (2.3.1)$$

Напомним, что dr/dt — это скорость изменения координаты r с течением времени t далекого наблюдателя (а не физического времени τ в данной точке), т.е. это координатная, а не физическая скорость. Физическая скорость есть изменение физического расстояния dx [см. (2.2.2)] с физическим временем τ [см. (2.2.5)]: $\frac{dx}{d\tau} = \pm \frac{\sqrt{g_{11}}dr}{\sqrt{-g_{00}}dt} = \pm c$. Разумеется, физическая скорость фотона (в любой системе отсчета) всегда равна c .

С точки зрения далекого наблюдателя (по его часам) изменение физического радиального расстояния dx с течением t есть

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{1/2}. \quad (2.3.2)$$

Таким образом, для далекого наблюдателя луч вблизи r_g движется медленнее, при $r \rightarrow r_g$ имеем $dx/dt \rightarrow 0$. Разумеется, это отражает замедление течения времени вблизи r_g — см. (2.2.5).

Сколько времени по часам далекого наблюдателя понадобится фотону, чтобы, двигаясь по радиусу от $r = r_1$, достигнуть r_g ? Проинтегрируем для этого уравнение (2.3.1):

$$t = \frac{r_1 - r}{c} + \frac{r_g}{c} \ln \left(\frac{r_1 - r_g}{r - r_g} \right) + t_0. \quad (2.3.3)$$

Здесь r_1 — положение фотона в момент t_0 . Выражение (2.3.3) показывает, что при $r \rightarrow r_g$ $t \rightarrow \infty$. С какого бы r_1 ни начинал свое падение фотон, по часам далекого наблюдателя время t достижения фотоном r_g бесконечно.

Как изменяется энергия фотона при движении по радиусу? Энергия пропорциональна частоте. Рассмотрим изменение частоты. Пусть в некоторой точке с $r = r_1$ происходят вспышки с интервалом Δt . Так как поле статично, то эти вспышки придут к наблюдателю с $r = r_2$ с тем же интервалом Δt . Интервалы собственного времени в этих двух точках относятся

как $\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \frac{\sqrt{-g_{00}(r_1)} \Delta t}{\sqrt{-g_{00}(r_2)} \Delta t}$, а частоты ω , следовательно, относятся как

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_2)}{g_{00}(r_1)}} = \sqrt{\frac{1 - r_g/r_2}{1 - r_g/r_1}}. \quad (2.3.4)$$

Частота кванта уменьшается при выходе из поля тяготения и увеличивается

при движении к центру. Это явление называют соответственно красным и фиолетовым гравитационным смещением.

Рассмотрим радиальное движение нерелятивистских частиц в вакууме. Исследуем сначала свободное движение, когда на частицу не действуют никакие негравитационные силы (свободное падение, движение по геодезической линии). Интегрирование уравнения для геодезических в случае $d\theta = d\varphi = 0$ [см. Богородский (1962*)] приводит к выражению

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{(1 - r_g/r) [(E/mc^2)^2 - 1 + r_g/r]^{1/2}}{E/mc^2} c. \quad (2.3.5)$$

Здесь E — константа движения, описывающая полную энергию частицы, включая ее массу покоя m . Если частица покоится вне поля тяготения на бесконечности, то $E = mc^2$. В общем случае величина E/mc^2 может быть и больше и меньше единицы, но E для частицы вне сферы радиуса r_g всегда положительна.

На больших расстояниях $r \gg r_g$ для нерелятивистских частиц $\left| \frac{E - mc^2}{mc^2} \right| \ll 1$ и выражение (2.3.5) переписывается в виде

$$\frac{m(dr/dt)^2}{2} = (E - mc^2) + \frac{GmM}{r}. \quad (2.3.6)$$

Величина $\mathcal{E} = E - mc^2$ является энергией частицы в ньютоновской теории (где в энергию не включается масса покоя), и все выражение (2.3.6) приобретает вид закона сохранения энергии в ньютоновской теории.

Напомним снова, что в выражении (2.3.5) dr/dt — это координатная (не физическая) скорость. Физическая скорость, измеряемая неподвижным в системе Шварцшильда наблюдателем, находящимся рядом со свободно движущимся телом, есть

$$\frac{dx}{d\tau} = \sqrt{\frac{g_{11}}{|g_{00}|}} \frac{dr}{dt} = \pm \frac{[(E/mc^2)^2 - 1 + r_g/r]^{1/2}}{E/mc^2} c. \quad (2.3.7)$$

Если падающее тело приближается к r_g , то физическая скорость все время нарастает, и при $r \rightarrow r_g$ имеем $dx/d\tau \rightarrow c$. Скорость dx/dt по часам далекого наблюдателя стремится к нулю при $r \rightarrow r_g$, как и в случае движения фотона. Этот факт отражает замедление течения времени при $r \rightarrow r_g$.

Сколько времени длится падение тела от некоторой точки с $r = r_1$ до гравитационного радиуса r_g по часам далекого наблюдателя?

Время движения от r_1 до r_g определяется интегрированием выражения (2.3.5). Интеграл расходится при $r \rightarrow r_g$. Результат этот неудивителен, так как даже для света $\Delta t \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow r_g$, а быстрее света ничто двигаться не может. Более того, характер расходимости Δt для падающего тела такой же, как для фотона, ибо при $r \rightarrow r_g$ скорость тела v всегда стремится к c . Очевидно, что, какие бы силы не действовали на частицу, время Δt достижения r_g всегда будет бесконечным, ибо и в этом случае всегда $v < c$. Таким образом, и свободное падение, и движение к r_g с любым ускорением всегда длятся бесконечное время по часам далекого наблюдателя.

Вернемся к свободно летящей частице. Каково время ΔT достижения r_g по часам на самой падающей частице? Оно находится по формуле $\Delta T = \int_{r_g}^{r_1} \frac{1}{c} |ds|$, где ds берется вдоль мировой линии частицы. Подставим

выражение ds из (2.2.1) с $d\theta = d\varphi = 0$ и получим

$$\Delta T = \frac{1}{c} \int_{r_g}^{r_1} \sqrt{\left| \frac{g_{00}}{(dr/c dt)^2} + g_{11} \right|} dr. \quad (2.3.8)$$

Для вычисления ΔT подставляем в (2.3.8) dr/dt из (2.3.5). Легко показать, что интеграл сходится, интервал ΔT конечен. Для частного случая $E = mc^2$, когда частица падает с параболической (второй космической) скоростью (т.е. $dr/dt = 0$ при $r \rightarrow \infty$), получаем для времени падения от r_1 до r :

$$\Delta T = \frac{2}{3} \frac{r_g}{c} \left[\left(\frac{r_1}{r_g} \right)^{3/2} - \left(\frac{r}{r_g} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.3.9)$$

Мы видели, что для далекого наблюдателя время падения частицы Δt бесконечно, по часам же на самой частице ΔT конечно. С физической точки зрения этот неожиданный на первый взгляд результат можно интерпретировать следующим образом. Часы на падающей к r_g частице замедляют свой ход по отношению к часам на бесконечности: во-первых, из-за замедления хода времени в гравитационном поле (2.2.5), а во-вторых, из-за лоренцева сокращения времени, когда их скорость $v \rightarrow c$ при $r \rightarrow r_g$. Поэтому бесконечный по t интервал становится конечным по T .

§ 2.4. Пространство-время внутри сферы Шварцшильда

Тот факт, что собственное время падения частиц до сферы Шварцшильда конечно, подсказывает способ построения системы отсчета, которую можно продолжить при $r < r_g$. Надо связать систему отсчета со свободно падающими частицами. При этом на гравитационном радиусе в такой системе заведомо не возникнут бесконечные ускорения F и соответствующие бесконечные силы, так как частицы системы свободно падают, находятся в невесомости и F тождественно везде равно нулю. Наиболее простая система отсчета такого рода состоит из свободно падающих частиц, имеющих на пространственной бесконечности нулевую скорость [система отсчета Леметра (1933); см. также Рылов (1961*)]. Движение этих частиц описывается уравнением (2.3.9).

Чтобы перейти к этой системе отсчета, выберем в качестве координаты времени время T , отсчитываемое часами на падающих частицах. В некоторый момент $T = \text{const}$, который мы примем за $T = 0$, совокупность свободно падающих частиц находится на разных r_1 . В качестве радиальной координаты в их системе отсчета можно выбрать эти значения r_1 , маркирующие частицы и неизменные в дальнейшем для каждой из них.

Тогда квадрат интервала в системе свободно падающих частиц запишется в виде

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + \frac{r_1 dr_1^2}{r_g \left[\left(\frac{r_1}{r_g} \right)^{3/2} - \frac{3}{2} \frac{cT}{r_g} \right]^{2/3}} + \left[\left(\frac{r_1}{r_g} \right)^{3/2} - \frac{3}{2} \frac{cT}{r_g} \right]^{4/3} r_g^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.4.1)$$

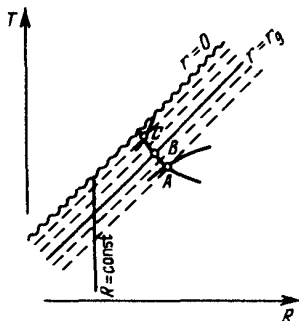


Рис. 1. Пространство-время Шварцшильда в координатах Леметра. Пунктир - линии $r = \text{const}$; ABC - мировая линия фотона, падающего в черную дыру. В точках A, B, C показаны отрезки мировых линий фотонов, движущихся в противоположную сторону

В качестве радиальной координаты в рассматриваемой системе удобно использовать не r_1 , а

$$R = \frac{2}{3} r_g \left(\frac{r_1}{r_g} \right)^{3/2}. \quad (2.4.2)$$

Квадрат интервала (2.4.1) теперь переписывается в виде

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2} \frac{(R - cT)}{r_g} \right]^{2/3}} + \left[\frac{3}{2} \frac{(R - cT)}{r_g} \right]^{4/3} r_g^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.4.3)$$

Система отсчета с интервалом (2.4.3) - система Леметра - действительно не имеет никаких особенностей на сфере Шварцшильда. Чтобы убедиться в этом, запишем в явном виде связь между координатами Шварцшильда и Леметра:

$$r = \left[\frac{3}{2} \frac{(R - cT)}{r_g} \right]^{2/3} r_g, \quad (2.4.4)$$

$$t = \frac{r_g}{c} \left\{ -\frac{2}{3} \left(\frac{r}{r_g} \right)^{3/2} - 2 \left(\frac{r}{r_g} \right)^{1/2} + \ln \left[\frac{(r/r_g)^{1/2} + 1}{(r/r_g)^{1/2} - 1} \right] + \frac{R}{r_g} \right\}. \quad (2.4.5)$$

Приравняв в (2.4.4) $r = r_g$, находим уравнение для положения сферы Шварцшильда в системе Леметра:

$$r_g = \frac{3}{2} (R - cT). \quad (2.4.6)$$

Выражения для всех $g_{\alpha\beta}$ в (2.4.3) на сфере Шварцшильда вполне регулярны, не имеют никаких особенностей. Вычисление всех отличных от нуля инвариантов кривизны 4-мерного пространства-времени также показывает отсутствие на сфере Шварцшильда каких-либо особенностей. Система Леметра продолжается при $r < r_g$. Пространство-время в координатах R, T Леметра изображено на рис. 1 (угловые координаты θ, φ не важны в силу симметрии). Система продолжима вплоть до $r = 0$, т.е. [см. (2.4.4)] $R =$

$= cT$. Здесь имеется истинная особенность пространства-времени — бесконечная кривизна. Это видно, например, из того факта, что инвариант кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \infty$ при $R - cT \rightarrow 0$. Бесконечность указанного инварианта означает бесконечность приливных гравитационных сил.

Как видно из рисунка, каждая свободно падающая частица с $R = \text{const}$ в системе Леметра движется с течением T к меньшим r . За конечное время T частица достигает r_g , падает дальше и достигает истинной особенности $r = 0^*$). Продолжить пространство-время за сингулярность нельзя; здесь бесконечны приливные гравитационные силы, разрушающие любые частицы. Вблизи $r = 0$ существенны квантовые эффекты гравитационного поля, о чем мы будем говорить в гл. 12.

На рис. 1 нанесены также мировые линии радиальных световых лучей. Они определяются из (2.4.3) условием $ds = 0, d\theta = d\varphi = 0$:

$$c \frac{dT}{dR} = \pm \left[\frac{r_g}{\frac{3}{2}(R - cT)} \right]^{1/3}. \quad (2.4.7)$$

Положение световых конусов на рис. 1 сразу показывает, почему сфера Шварцшильда играет особую роль в системе отсчета Шварцшильда и вообще в сферическом поле тяготения. Дело в том, что при $r > r_g$ мировые линии $r = \text{const}$ (здесь и далее мы считаем $\theta = \text{const}, \varphi = \text{const}$) лежат внутри светового конуса, т.е. они времениподобны; линия $r = r_g$ совпадает с мировой линией фотона, т.е. светоподобна; наконец, при $r < r_g$ мировые линии $r = \text{const}$ пространственноподобны.

Вот почему система Шварцшильда, образованная частицами с $r = \text{const}$, не может быть продолжена при $r < r_g$.

Рассматриваемая ситуация оказывается характерной для общей теории относительности и отличает ее от обычной теории поля в плоском пространстве. Для решения уравнений Эйнштейна необходимо выбрать определенные координаты. С этой целью обычно вводятся дополнительные условия, фиксирующие вид метрики. При этом из-за возможной сложной глобальной структуры пространства-времени в общей теории относительности (например, нетривиальной его топологии) нельзя, вообще говоря, гарантировать, что выбранные координаты покрывают все пространство-время. Именно с этой ситуацией мы столкнулись выше, при попытке описать полное сферически-симметричное пространство-время в координатах кривизны (2.1.2). Общий прием, позволяющий установить, действительно ли полученное решение описывает все пространство-время или только часть его, состоит в изучении поведения пробных частиц и лучей света. Если за конечное собственное время (или при конечном значении аффинного параметра для фотонов) некоторые из частиц достигают "границы" выбранной координатной системы, а физические особенности в этих "конечных" точках траекторий частиц отсутствуют, то эта координатная система неполна. Изменив координатные условия и перейдя к метрике (2.4.1), нам удалось покрыть

^{*}) Тот факт, что линии $r = \text{const}$ в координатах R, T изображаются прямыми, связан со специальным выбором R [см. (2.4.2)]. Этим, в частности, объясняется выбор координаты R вместо r_1 .

большую область пространства-времени и, в частности, описать возможные события, происходящие под гравитационным радиусом. Обсуждение вопроса о том, является ли координатная система Леметра действительно полной и описывает ли метрика (2.4.1) все пространство-время, мы отложим до § 2.7, а пока вернемся к обсуждению свойств сферы Шварцшильда и области пространства-времени, лежащей внутри нее. [Общее обсуждение затронутых вопросов см. Хокинг, Эллис (1973).]

Самая примечательная особенность сферы Шварцшильда заключается в следующем. Из точек с $r > r_g$ луч света, идущий наружу (направо на рис. 1), движется к все большему r и уходит на пространственную бесконечность. Для точек с $r < r_g$ оба луча (и идущий налево, и идущий направо) движутся к все меньшим r , не уходят на пространственную бесконечность, а "упираются" в сингулярность $r = 0$. Мировая линия любой частицы обязана лежать внутри светового конуса. Поэтому при $r < r_g$ все частицы обязаны двигаться к $r = 0$ — это есть направление в будущее. Движение к большему r в области $r < r_g$ невозможно [см. Финкельштейн (1958)]. Подчеркнем, что сказанное относится не только к свободно падающим частицам (т.е. движущимся по геодезическим), но и к частицам, имеющим любое ускорение. Никакое излучение, никакие частицы не выходят к далекому внешнему наблюдателю из-под сферы Шварцшильда.

Мы определили в (2.2.1) r так, чтобы $g_{22} = r^2$, т.е. как радиальную координату в системе координат кривизны [см. (2.1.1)]. Так же формально определяется r и внутри сферы Шварцшильда, хотя здесь линия $r = \text{const}$ пространственноподобна и не может служить радиальной пространственной координатой. При $r < r_g$ величина g_{22} всегда зависит от времени, притом монотонно в любой системе, определяемой соотношениями (2.1.3) — (2.1.5). Все системы отсчета при $r < r_g$ нестатичны, оба радиальных луча света идут только к меньшим r (а значит, к меньшим g_{22}). Области пространства-времени с таким свойством называют *Т-областями* [Новиков (1962*а, 1964*а)]. Область пространства-времени вне сферы Шварцшильда называют *Р-областью*.

Дадим более точное определение *Р*- и *Т*-областей. Рассмотрим пространство-время со сферической симметрией. При этом оно может содержать материю ($T_{\alpha\beta} \neq 0$) или быть пустым. По определению сферически-симметричного поля тяготения его метрика всегда может быть записана в виде (2.1.2). Если в окрестности рассматриваемой точки мировая линия $x^1 = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ времениподобна, то эта точка принадлежит *Р*-области. Если эта линия пространственноподобна, то рассматриваемая точка принадлежит *Т*-области.

Вернемся к случаю сферически-симметричного поля тяготения в вакууме.

Помимо уже рассмотренной системы отсчета Леметра, для исследования областей как внутри, так и снаружи сферы Шварцшильда используются и другие системы отсчета. Здесь и в дальнейших параграфах мы приведем некоторые из них.

Прежде всего обратимся снова к системе координат (2.2.1). На сфере Шварцшильда эта система, как мы показали в § 2.2, сингулярна. Но при r , строго меньшем r_g , метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ опять регулярны. Имеет ли эта система какой-либо прямой физический смысл при $r < r_g$?

Оказывается, имеет [Новиков (1961*)]. Координата r теперь (при $r < r_g$) не может быть, как показано выше, радиальной пространственной координатой. Однако она может играть роль временной координаты, что прямо следует из выражения (2.2.1), где коэффициент при dr^2 меняет знак при переходе через сферу Шварцшильда и при $r < r_g$ отрицателен. С другой стороны, координата t теперь может служить пространственной радиальной координатой, коэффициент при dt^2 положителен для $r < r_g$. Таким образом, координаты r и t при $r < r_g$ поменялись ролями. Поменяем обозначения $r = -c\tilde{T}$, $t = \tilde{R}/c$ и перепишем (2.2.1) в виде

$$ds^2 = - \left[\frac{r_g}{(-c\tilde{T})} - 1 \right]^{-1} c^2 d\tilde{T}^2 + \left[\frac{r_g}{(-c\tilde{T})} - 1 \right] d\tilde{R}^2 + c^2 \tilde{T}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.4.8)$$

$$0 < -c\tilde{T} < r_g, \quad -\infty < \tilde{R} < \infty. \quad (2.4.9)$$

Система отсчета (2.4.8) – (2.4.9) может быть осуществлена свободными пробными частицами, движущимися по геодезическим внутри сферы $r = r_g$. Трехмерное сечение $\tilde{T} = \text{const}$ имеет бесконечную пространственную протяженность по координате $\tilde{R}$, а вдоль координат θ и φ оно замкнуто и является в целом топологическим произведением сферы на прямую. Трехмерный объем этого сечения бесконечен. Система нестационарна, она сжимается вдоль θ и φ (радиус сферы уменьшается от r_g до 0) и расширяется вдоль $\tilde{R}$. Собственное время ее существования конечно:

$$\tau = \int_{r_g/c}^0 \sqrt{-g_{00}} d\tilde{T} = \frac{\pi}{2} r_g. \quad (2.4.10)$$

Мировые линии частиц $\tilde{R} = \text{const}$, образующих систему, показаны на рис. 2 в координатах Леметра (2.4.3). Из рисунка видно, что частицы движутся внутри сферы Шварцшильда и система ни в коем случае не яв-

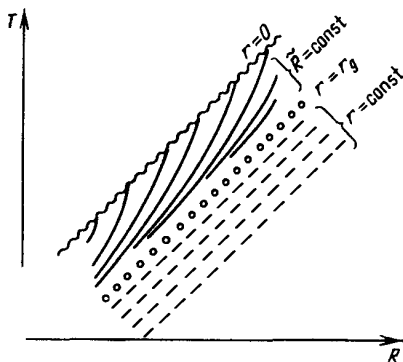


Рис. 2. Мировые линии частиц $\tilde{R} = \text{const}$, образующих систему отсчета (2.4.9) в координатах Леметра

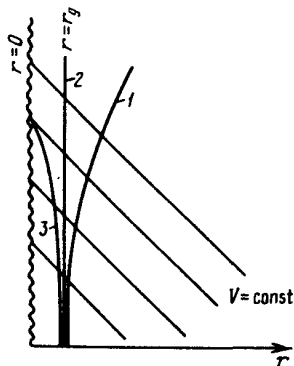


Рис. 3. Пространство-время Шварцшильда в координатах Эддингтона – Финкельштейна (2.4.12): $V = \text{const}$ – мировые линии фотонов, падающих к $r = 0$; 1, 2, 3 – мировые линии фотонов, движущихся в противоположном (по сравнению с $V = \text{const}$) направлении

ляется продолжением системы Шварцшильда для $r < r_g$ (ее мировые линии $r = \text{const}$ показаны на том же рисунке). Время и пространственное радиальное направление в этих системах своеобразно меняются местами.

Приведем теперь систему отсчета, которая исторически была первой из построенных систем, не имеющих особенностей на r_g [Эддингтон (1924), Финкельштейн (1958)]. Эта система связана с фотонами, свободно движущимися по радиусу. Уравнение движения фотонов определяется выражением (2.3.3). Для фотонов, движущихся к центру, r уменьшается с ростом t . Выражение (2.3.3) для таких фотонов можно переписать в виде

$$t = -\frac{r}{c} - \frac{r_g}{c} \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right| + \frac{V}{c}. \quad (2.4.11)$$

Здесь V — константа, характеризующая радиальную координату фотона для фиксированного момента t .

В выражении (2.4.11) под логарифмом поставлен знак модуля, что обеспечивает применимость выражения и при $r < r_g$ *). Если мы возьмем множество фотонов при фиксированном t и припишем каждому фотону номер V , который в дальнейшем не меняется при движении фотона, то подобно тому, как в случае нерелятивистской частицы [см. (2.3.9)] мы выбирали r_1 в качестве новой радиальной координаты, здесь можно выбрать V в качестве другой новой координаты. Правда, есть и существенное отличие — никакой наблюдатель не может двигаться вместе с фотоном и в этом смысле новая система не подходит, строго говоря, под определение системы отсчета. Но в некоторых случаях такая "система" из пробных фотонов бывает удобна. Надо только всегда помнить, что V — световая координата (не пространственная и не временная). В качестве второй координаты можно выбрать прежнюю координату r . Тогда, дифференцируя (2.4.11) и подставляя получающееся выражение для dt в (2.2.1), находим

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dV^2 + 2dV dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.4.12)$$

Выражение (2.4.12) регулярно на $r = r_g$. Действительно, коэффициент при dV^2 обращается в нуль на r_g , но наличие члена $2dV dr$ обеспечивает невырожденность этой системы координат. Пространство-время в координатах V, r изображено на рис. 3; при этом учтено, что система неортогональна и координатные линии образуют между собой постоянный угол 45° (на плоскости V, r).

§ 2.5. Сжимающиеся и расширяющиеся T -области

Рассмотренные выше свойства систем отсчета внутри сферы Шварцшильда в T -области весьма своеобразны. Действительно, мы видим, что все эти системы обязательно должны сжиматься по θ - и φ -направлениям, а коэффициент g_{12} должен уменьшаться со временем (что эквивалентно уменьшению r со временем). По-другому этот факт можно сформулировать

*) Всегда надо помнить об изменении смысла координат r и t при $r < r_g$ (см. выше).

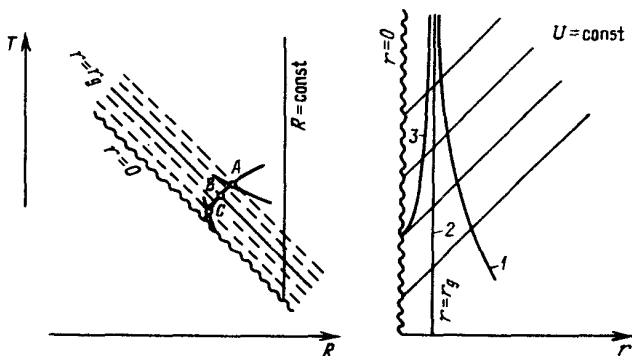


Рис. 4. Пространство-время Шварцшильда в расширяющихся координатах Леметра. Направление хода времени изменено на противоположное по сравнению с рис. 2

Рис. 5. Пространство-время Шварцшильда в расширяющихся координатах Эддингтона — Финкельштейна. Направление хода времени изменено на противоположное по сравнению с рис. 3

как необходимое движение к сингулярности $r = 0$ всех лучей света и всех частиц в T -области. Однако известно, что уравнения Эйнштейна инвариантны относительно замены знака времени. Все приведенные выше формулы останутся решениями уравнений Эйнштейна, если сделать замену $t \rightarrow -t$, $T \rightarrow -T$, $\tilde{t} \rightarrow -\tilde{t}$, $V \rightarrow -U$, где U нумерует выходящие лучи ($U = 2t - V$). Но такая замена эквивалентна изменению направления течения времени на противоположное. Значит, возможны системы отсчета (например, Леметра, Эддингтона и т.д.), расширяющиеся из-под сферы Шварцшильда и образованные частицами, вылетающими из сингулярности в T -области, пересекающими затем сферу Шварцшильда и улетающими на бесконечность (рис. 4, 5).

Как совместить вылет частиц из-под сферы Шварцшильда с неоднократно подчеркиваемым выше утверждением, что из-под нее частица вылететь не может? Дело заключается в следующем. Никакая частица не может вылететь из T -области (из-под сферы Шварцшильда), если она (или другая частица) *влетела* туда. Другими словами, если под сферу Шварцшильда можно *влететь*, то из-под нее *нельзя вылететь*. T -область, которая есть в решениях с заменой течения времени на противоположное, это *совсем другая* T -область с совсем другими свойствами. Если в первой T -области возможно было только сжатие, то во второй возможно только расширение, туда нельзя упасть (что наглядно видно из рис. 4, 5).

Подчеркнем, что внешнее пространство (вне сферы с $r = r_g$) в обоих случаях тождественно одно и то же. Преобразованием координат метрика его сводится к (2.2.1), но оно может быть продолжено внутрь сферы Шварцшильда *двояким образом*: либо как сжимающаяся T -область, либо как расширяющаяся T -область (но никак не вместе!). Какой тип T -области осуществляется конкретно, зависит от граничных или начальных условий. Мы подробно остановимся на этом в следующем параграфе. Сжимающуюся T -область принято обозначать T_- , расширяющуюся — T_+ .

§ 2.6. Гравитационный коллапс — возникновение черной дыры. Белые дыры

В этом параграфе мы разберем процесс возникновения черной дыры в результате сжатия сферической массы до размеров меньше r_g . Чтобы избавиться от эффектов, не имеющих непосредственного отношения к образованию черной дыры и только осложняющих решение, рассмотрим сжатие сферического облака вещества, лишённого давления, $p = 0$ (облако пыли). В этом случае не придется рассматривать гидродинамических явлений, связанных с градиентом давления. Все частицы (пылинки) движутся по радиальным геодезическим, подвергаясь действию только гравитационного поля. Решение уравнений Эйнштейна для этого случая было получено Толменом (1934). В приводимом решении система отсчета сопутствует веществу, т.е. пылинки имеют постоянные R, θ, φ :

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + g_{11}(T, R) dR^2 + r^2(T, R)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.6.1)$$

$$\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}, \quad (2.6.2)$$

$$g_{11}(T, R) = \frac{(r')^2}{1 + f(R)}, \quad (2.6.3)$$

$$\frac{8\pi G\rho}{c^2} = \frac{F'(R)}{r' r^2}. \quad (2.6.4)$$

Здесь точка — дифференцирование по cT , штрих — дифференцирование по R ; $f(R)$ и $F(R)$ — две произвольные функции от R (должно выполняться $1 + f(R) > 0$). Уравнение (2.6.2) определяет функцию r после задания $f(R)$ и $F(R)$, ρ — плотность вещества.

Решение Толмена может описывать, например, сжатие пылевого шара конечных размеров. Для описания этого процесса выберем начальный момент $T = \text{const}$. Тогда (2.6.4) определит распределение плотности. Если координата R_1 определяет границу шара, то вне шара (при $R > R_1$) $\rho = 0$ и $F = \text{const}$. Изменение r с течением T для частиц шара описывается уравнением (2.6.2). Из уравнения видно, что каждая частица с фиксированным R , имеющая $\dot{r} < 0$, за конечное T достигает $r = 0$, где имеется истинная сингулярность пространства-времени.

Вне шара метрика пространства-времени однозначно определяется массой шара, которая задается значением F на его границе R_1 . Эта метрика в пустоте является метрикой Шварцшильда (см. § 2.2).

Частицы на поверхности шара свободно падают в этой внешней метрике, поэтому их движение может быть представлено как движение по радиальным геодезическим в метрике Шварцшильда [см. (2.3.5)]. В частности, можно рассмотреть сжатие шара, частицы на поверхности которого падают с параболической (второй космической) скоростью. Формулы движения таких частиц особенно просты [см. (2.3.9)]. В системе Леметра уравнение мировой линии этих частиц будет $R_1 = \text{const}$. Уравнение этой же линии в системе Эддингтона — Финкельштейна дается в параметрическом виде выражениями (2.4.11), (2.4.4), (2.4.5), если в двух последних формулах положить $R = R_1 = \text{const}$.

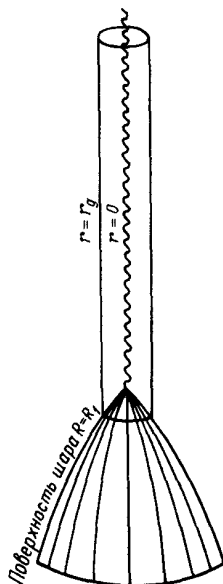
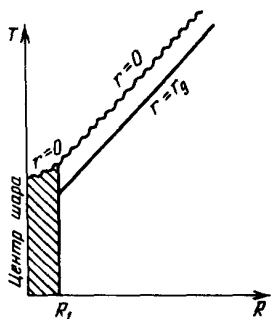


Рис. 6. Пространство-время сжимающегося шара с образованием черной дыры в координатах Леметра. Область внутри шара заштрихована

Рис. 7. Пространство-время сжимающегося шара с образованием черной дыры в координатах Эддингтона – Финкельштейна

Картина пространства-времени для сжимающегося шара изображена на рис. 6 и 7 в координатах Леметра и Эддингтона – Финкельштейна соответственно. Последний рисунок, где изображена и одна из вращательных степеней свободы, особенно нагляден. Поверхность сжимающегося шара за конечное собственное время достигает сферы Шварцшильда $r = r_g$ и затем стягивается в точку к $r = 0$. Этот процесс называют релятивистским *гравитационным коллапсом*. В результате коллапса внутри сферы Шварцшильда возникает пространственно-временная область, из которой никакие сигналы не уходят на пространственную бесконечность. Такая область и называется *черной дырой*. Итак, в результате релятивистского гравитационного коллапса сферического невращающегося тела возникает сферическая черная дыра.

Заметим теперь, что сделанное выше предположение об отсутствии давления ничего качественно не меняет в картине образования сферической черной дыры. В общем случае сжатия шара с давлением ($p \neq 0$) картина такая же. Когда поверхность сжимающегося шара приближается к сфере Шварцшильда, никакое давление не может предотвратить возникновения черной дыры [подробно эти вопросы см. Зельдович, Новиков (1971*)]. К нашей теме эти вопросы непосредственно не относятся, и мы здесь на них не останавливаемся.

В результате гравитационного коллапса внутри сферы Шварцшильда возникает сжимающаяся T_- область. Это следует из требования непрерыв-

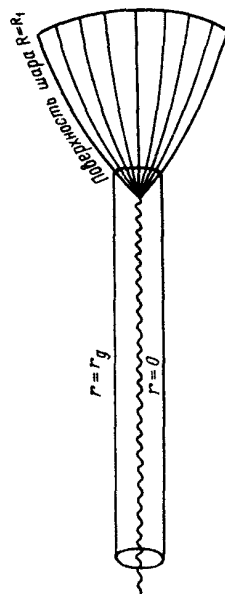
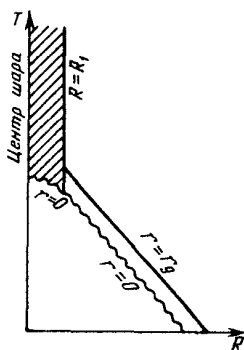


Рис. 8. Расширение шара из-под сферы Шварцшильда в расширяющихся координатах Леметра

Рис. 9. Расширение шара из-под сферы Шварцшильда в координатах Эддингтона – Финкельштейна

ности коэффициента метрики g_{22} (коэффициента перед угловой пространственной частью) при переходе в фиксированный момент времени со сжимающейся поверхности шара в вакуум*). На поверхности сжимающегося шара этот коэффициент уменьшается с течением времени при $r < r_g$. Значит, вследствие непрерывности он будет уменьшаться со временем и вне шара (при $r < r_g$), т.е. внутри сферы $r = r_g$ расположена именно сжимающаяся T_- -область.

При каких условиях возникает расширяющаяся T_+ -область? Обратив направление течения времени на рис. 6 и 7, получим рис. 8 и 9. Они изображают расширение шара из-под сферы Шварцшильда. Из условия непрерывности g_{22} на границе шара теперь следует, что в вакууме — вне шара, но внутри сферы Шварцшильда с $r = r_g$ — находится расширяющаяся T_+ -область. Общую ситуацию наглядно иллюстрирует рис. 8. Вспомним, что линия $r = 0$ пространственноподобна, т.е. существует система отсчета, в которой все события на этой линии одновременны. Таким образом, нельзя сказать, как это кажется на первый взгляд (см. рис. 8 и 9), что сначала была сингулярность $r = 0$ в вакууме, а потом из нее начало расширяться вещество шара. Эти события не связаны времениподобным интервалом. Правильнее сказать, что природа пространственноподобной сингулярности $r = 0$ такова, что она порождает расширение в вакууме (расширяющуюся

*) Разрывы в g_{22} ведут к разрывам в пространстве-времени.

T_+ -область) правее R_1 и расширяющееся вещество шара левее R_1 (см. рис. 8). Заметим, что в расширяющуюся T_+ -область не может попасть никакой сигнал, никакая частица с пространственной бесконечности (вообще из области с $r > r_g$). Такие области пространства-времени называют *белыми дырами* [Новиков (1964*^b), Нееман (1965)]. Они не могут возникнуть во Вселенной в результате коллапса какого-либо объекта, но в принципе могли бы существовать в расширяющейся Вселенной с самого начала ее расширения. Подробнее этот круг вопросов рассматривается в § 13.2.

В заключение параграфа еще раз подчеркнем, что с математической точки зрения невозможно продолжать решение за истинную сингулярность пространства-времени $r = 0$. Таким образом, ОТО не может дать ответа на вопрос, что будет после сжатия до $r = 0$ в T_- -области или что было до начала расширения из $r = 0$ в T_+ -области (и даже сказать, корректна ли постановка таких вопросов). С физической точки зрения ясно, что вблизи $r = 0$ существенны квантовые процессы уже для самого пространства-времени (что не описывается ОТО). Мы вернемся к этому в гл. 13.

§ 2.7. Вечные черные и белые дыры

На первый взгляд кажется возможным существование в пустом пространстве вечной черной дыры, т.е. такой черной дыры, которая не возникает в результате сжатия массы (как изображено на рис. 6 и 7), а всегда существует в виде, показанном на рис. 1 и 3. В таком пространстве-времени всегда есть сфера Шварцшильда и нет сжимающегося вещества шара.

Удивительным образом оказывается, что такого образования — "чистой" вечной черной дыры — в принципе быть не может. Дело заключается в следующем. Картина или, как говорят, карта пространства-времени, представленная на рис. 1 (или рис. 3), не охватывает всего пространства-времени. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим частицу, свободно движущуюся по радиусу от сферы Шварцшильда. Ее мировая линия в сжимающейся системе Леметра определяется выражением

$$\begin{aligned} \text{const} = & -\frac{R}{r_g} + \frac{2cT}{r_g} - 4\left(\frac{3}{2}\frac{R - cT}{r_g}\right)^{1/3} + \\ & + 2\ln\left(\frac{\left[\frac{3}{2}(R - cT)\right]^{1/3} + r_g^{1/3}}{\left[\frac{3}{2}(R - cT)\right]^{1/3} - r_g^{1/3}}\right) \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

и изображена на рис. 10. Продолженная в прошлое, она асимптотически подходит к линии $r = r_g$, не пересекая ее. По времени T системы отсчета Леметра частица существует от $T = -\infty$. Однако мы знаем, что по собственному времени частицы путь от r_g до любого конечного r занимает конечный промежуток. Таким образом, рис. 10 не охватывает всей прошлой истории рассмотренной частицы от $\tau = -\infty$ по ее собственным часам. Ведь история одиночной (т.е. не взаимодействующей с другими частицами —

скажем не рождающейся, например, во взаимодействиях) частицы не обрывается на сфере Шварцшильда. Мировая линия такой частицы должна либо продолжаться бесконечно по ее собственному времени, либо обрываться на истинной сингулярности пространства-времени, где вступают в силу новые физические законы. Значит, карта неполна, не покрывает всего пространства-времени.

Можно ли построить всюду пустое пространство-время с вечной черной дырой, которое полно в том смысле, что охватывает все истории всех движущихся в нем частиц? Оказывается, можно, хотя в нем, как мы увидим, будет представлена не только вечная черная дыра, но и вечная белая дыра.

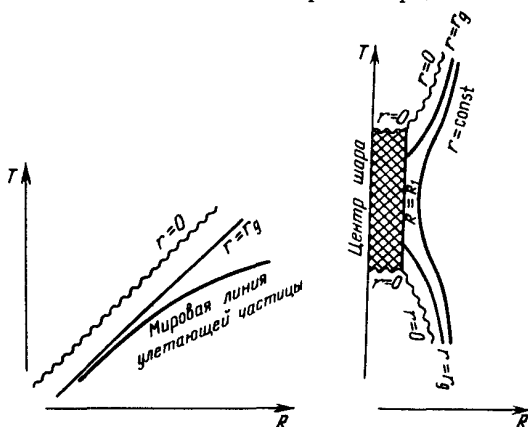


Рис. 10. Мировая линия частицы, улетающей от сферы Шварцшильда, в сжимающихся координатах Леметра

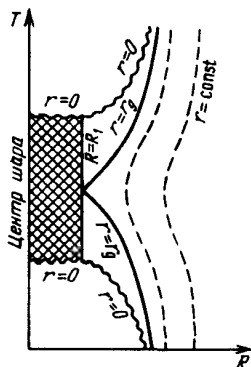
Рис. 11. Расширение шара из-под сферы Шварцшильда с последующим сжатием под сферой. Область внутри шара заштрихована

Чтобы естественно подойти к такому построению, рассмотрим белую дыру с расширяющимся пылевым шаром. Представим, что энергия движения частиц шара такова, что поверхность шара не разлетается в бесконечность, а, достигнув максимального радиуса, снова сжимается до размеров r_g , а затем коллапсирует до $r = 0$.

Согласно формуле (2.3.5) удельная энергия E/mc^2 частицы на поверхности шара должна быть меньше единицы, чтобы $dr/dt = 0$ при некотором r . В решении Толмена (2.6.1) — (2.6.4) такой разлет до конечного радиуса соответствует выбору $f(R) < 0$. Качественно пространство-время с расширяющимся, а затем сжимающимся пылевым шаром изображено на рис. 11. В этом пространстве-времени имеется сначала белая дыра, а затем возникает черная дыра. Обратим внимание на то, что на рисунке линии $r = 0$ и $r = r_g$ в данном решении изображаются уже не прямыми, как в случае движения с параболической скоростью (см. рис. 6, 8).

Будем уменьшать удельную энергию E/mc^2 частиц на поверхности шара. Полную массу шара M , а значит, и величину r_g считаем фиксированными, т.е. с уменьшением E/mc^2 мы уменьшаем долю кинетической энергии разлета в полной энергии Mc^2 шара. Тогда шар будет разлетаться до все мень-

Рис. 12. Граница шара расширяется только до сферы Шварцшильда и затем сжимается



ших радиусов. Наконец, при $E/mc^2 = 0$ разлет шара происходит до $r = r_g$. Пространство-время тогда качественно выглядит так, как показано на рис. 12.

Что будет, если константу E уменьшать и дальше, делая ее отрицательной? На первый взгляд это физически бессмысленно, а формально ведет к увеличению максимального радиуса разлета r , что определяется приравниванием нулю dr/dt в формуле (2.3.5). В действительности ничего бессмысленного в такой операции нет. Чтобы в этом разобраться, обратимся к формулам (2.6.1) — (2.6.4). Будем считать, что пылевой шар, эволюция которого рассматривается, однороден. Тогда внутри шара метрика пространства-времени соответствует метрике однородной изотропной Вселенной. В решении (2.6.1) — (2.6.4) такая метрика отвечает выбору функций

$$f(R) = -\sin^2 R, \quad (2.7.2)$$

$$F(R) = a \sin^3 R, \quad (2.7.3)$$

где a — масштабный фактор, определяемый плотностью $\rho_{\max}$ внутри шара в момент максимального расширения:

$$a = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \rho_{\max}}}. \quad (2.7.4)$$

Вещество шара продолжается до граничного значения координаты $R = R_1$. Значение R_1 может лежать в пределах $0 < R_1 \leq \pi$. Вне шара, в вакууме (при $R > R_1$), частицы, осуществляющие систему отсчета, свободно движутся по радиальным геодезическим. Метрика определяется следующими функциями [Новиков (1963*, 1964* а)]:

$$f(R) = -\frac{1}{(R + \operatorname{ctg} R_1 - R_1)^2 + 1}, \quad (2.7.5)$$

$$F(R) = r_g. \quad (2.7.6)$$

В этой ситуации

$$r_g = a \sin R_1. \quad (2.7.7)$$

Сумма масс покоя частиц, из которых состоит шар, определяемая произведением плотности на объем шара, есть

$$M_* = \frac{3}{4} \frac{ac^2}{G} \left(R_1 - \frac{1}{2} \sin 2R_1 \right). \quad (2.7.8)$$

Величина M (гравитационная масса) характеризует полную энергию частиц шара, включая гравитационную. Если граничная координата R_1 лежит в пределах $\pi/2 < R_1 < \pi$, то внутренность шара представляет собой так

называемый *полузамкнутый мир* [см. Зельдович, Новиков (1975*)]; там же ссылки на предыдущие работы]. В этих условиях увеличение граничного значения R_1 (добавление новых слоев вещества) увеличивает M_* , но уменьшает M (из-за сильного гравитационного дефекта массы).

Наша цель — исследование эволюции шара, когда мы сообщаем его частицам все меньшую и меньшую удельную энергию. Это значит, что мы будем брать все меньшее и меньшее отношение M/M_* . Для выяснения того, что при этом получается, можно поступить двояко — беря разные отношения M/M_* , фиксировать неизменной либо M , либо M_* . Выбор имеет только методическое значение. Так как нас будет интересовать метрика вне шара, мы зафиксируем M , определяющую внешнюю метрику.

Проследим при этом, как будет происходить эволюция во времени границы шара $r(R_1, T)$ для каждого фиксированного R_1 и какова метрика вне шара. Отношение M/M_* определяется (2.7.7) и (2.7.8):

$$\frac{M}{M_*} = \frac{2}{3} \sin^3 R_1 (R_1 - \sin R_1 \cos R_1)^{-1}. \quad (2.7.9)$$

Эволюция границы шара описывается отношением радиуса наибольшего расширения границы $r_{\max}$ к гравитационному радиусу r_g :

$$r_{\max}/r_g = \sin^{-2} R_1. \quad (2.7.10)$$

Когда $R_1 \ll \pi/2$, отношение M/M_* лишь немного меньше единицы, и картина эволюции качественно выглядит так, как показано на рис. 11 ($r_{\max}/r_g \gg 1$).

Когда $R_1 = \frac{\pi}{2}$, $\frac{M}{M_*} = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{r_{\max}}{r_g} = 1 \right)$, и ситуация показана на рис. 12.

При $R_1 > \pi/2$ шар является полузамкнутым миром, отношение M/M_* уменьшается с приближением R_1 к π . Это соответствует $E < 0$ в (2.3.5). Теперь метрика выглядит так, как показано на рис. 13.

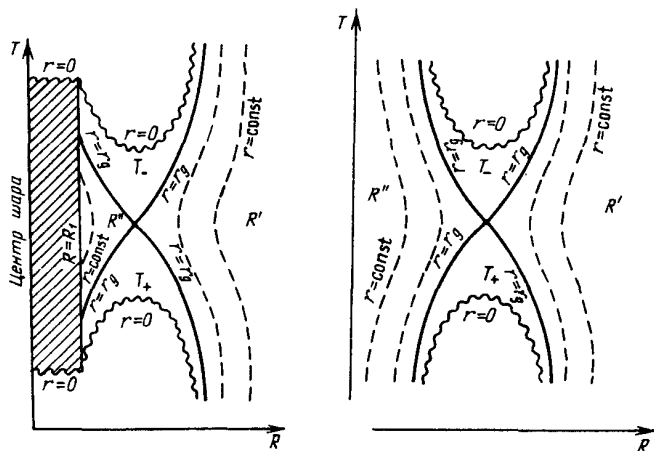


Рис. 13. Расширение и сжатие полузамкнутого мира

Рис. 14. Всюду пустое пространство-время с белой и черной дырой

Появилась новая качественная особенность. Отношение $r_{\max}/r_g$ снова больше единицы. Но граница шара теперь не появляется из-под сферы с радиусом r_g в пространстве внешнего наблюдателя R' . Появилась новая область R'' , которая вне шара во всем идентична R' .

При $R_1 \rightarrow \pi$ граница R_1 все больше сдвигается влево на рис. 13, оставляя свободной все большую часть R'' . Отношение $r_{\max}/r_g$ стремится к бесконечности, а отношение M/M_* — к нулю.

Если перейти к пределу $R_1 = \pi$, то область, занятая веществом, исчезнет вовсе, все пространство-время теперь пустое (рис. 14). В нем есть белая дыра T_+ , черная дыра T_- и два идентичных внешних пространства R' и R'' , переходящие в евклидовы на пространственной бесконечности. Это пространство-время полно в том смысле, что любая геодезическая теперь либо продолжается неограниченно, либо заканчивается истинной сингулярностью.

Система отсчета, охватывающая все пространство-время на рис. 14, описывается решением вида (2.7.5) — (2.7.6), где начало отсчета R удобно выбрать в минимуме функции $f(R)$. Тогда

$$f(R) = -\frac{1}{R^2 + 1}, \quad F = r_g, \quad -\infty < R < \infty. \quad (2.7.11)$$

Впервые полное, всюду пустое пространство-время, изображенное на рис. 14, было построено Сингом (1950), затем Фронделом (1959), Крускалом (1960), Жекересом (1960). Физические соображения, приведенные выше, и решение (2.7.11) получены Новиковым (1962*б, 1963*).

Итак, мы получили всюду пустое пространство с присутствием белой и черной дыр (обязательно вместе!). Эти дыры можно назвать "вечными", так как с точки зрения внешних наблюдателей, покоящихся в R' и R'' , эти дыры существуют всегда.

Физический смысл второго "внешнего пространства" R'' выяснен выше, когда рассматривалась эволюция шара со все меньшей удельной энергией M/M_* . Вопрос о том, могут ли реально существовать вечные черные и белые дыры (подобные рис. 14), совсем лишены вещества, будет рассмотрен в § 13.2 в связи с вопросом устойчивости белых дыр.

В заключение этого параграфа приведем систему координат, предложенную Крускалом (1960) и Жекересом (1960). Она, как и система (2.7.11), покрывает все пространство-время вечных белой и черной дыр. В этих координатах интервал записывается в виде

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} e^{-r/r_g} (-d\tilde{v}^2 + d\tilde{u}^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.7.12)$$

где r — функция $\tilde{v}$ и $\tilde{u}$:

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)e^{r/r_g} = \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2. \quad (2.7.13)$$

Связь координат $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ с r и t в областях R' и T_- дается следующими

соотношениями:

$$\tilde{u} = \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{ch} \frac{ct}{2r_g}, \quad \text{при } r > r_g, \quad (2.7.14)$$

$$\tilde{v} = \left(\frac{r}{r_g} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{sh} \frac{ct}{2r_g}$$

$$\tilde{u} = \left(1 - \frac{r}{r_g} \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{sh} \frac{ct}{2r_g}, \quad \text{при } r < r_g. \quad (2.7.15)$$

$$\tilde{v} = \left(1 - \frac{r}{r_g} \right)^{1/2} e^{r/2r_g} \operatorname{ch} \frac{ct}{2r_g}$$

В областях R'' и T_+ аналогичные соотношения получаются путем замены $\tilde{u} \rightarrow -\tilde{u}$, $\tilde{v} \rightarrow -\tilde{v}$. Система Крускала удобна тем, что в ней радиальные нулевые геодезические изображаются прямыми линиями, наклоненными под углом 45° к осям координат.

§ 2.8. Небесная механика в поле тяготения черной дыры

Вернемся к обсуждению процессов во внешнем по отношению к сфере Шварцшильда пространстве черной дыры. В этом параграфе мы рассмотрим движение пробных частиц по геодезическим вокруг черной дыры. Вопрос этот давно и тщательно проанализирован, вошел в учебники и монографии [см. Зельдович, Новиков (1971*), Мизнер, Торн, Уилер (1973)]. Мы ограничимся здесь кратким обсуждением именно тех особенностей движения, которые специфичны для черной дыры, а не просто для сильного поля тяготения (скажем, вокруг нейтронной звезды).

Будем рассматривать движение частиц во внешнем пространстве по отношению к системе отсчета Шварцшильда по часам наблюдателя на бесконечности (см. § 2.2). Так как поле тяготения сферически-симметрично, то траектория частицы плоская, и можно считать, что она лежит в плоскости $\theta = \pi/2$. Уравнения движения имеют вид

$$\left(\frac{dr}{c dt} \right)^2 = \frac{(1 - r_g/r)^2 [\tilde{E}^2 - (1 - r_g/r)(1 + \tilde{L}^2 r_g^2/r^2)]}{\tilde{E}^2}, \quad (2.8.1)$$

$$\frac{d\varphi}{c dt} = \frac{(1 - r_g/r) \tilde{L} r_g}{\tilde{E} r^2}. \quad (2.8.2)$$

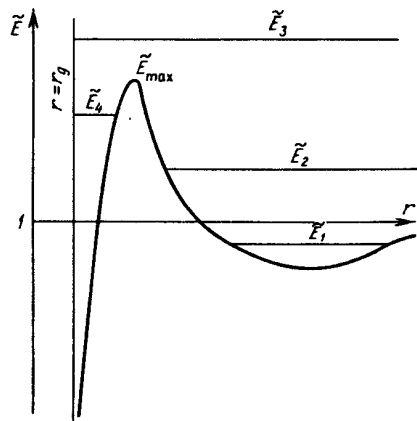
Здесь $\tilde{E}$ — удельная энергия частицы (на единицу собственной энергии mc^2 , m — масса частицы), $\tilde{L}$ — удельный угловой момент (измеренный в единицах $mc r_g$). Обе величины сохраняются при движении. Физическая скорость частицы v , измеренная находящимся рядом наблюдателем по его часам τ , непосредственно связана с энергией $\tilde{E}$, что следует из (2.8.1) — (2.8.2):

$$\tilde{E}^2 = (1 - r_g/r)(1 - v^2/c^2)^{-1}. \quad (2.8.3)$$

Рис. 15. Эффективный потенциал черной дыры

Качественные особенности движения частицы выявляются следующим образом. Приравнявая dr/dt нулю, можно найти точки наибольшего приближения частицы к черной дыре и наибольшего удаления от нее. Правая часть (2.8.1) равна нулю, когда выполняется равенство

$$\tilde{E}^2 = (1 - r_g/r)(1 + \tilde{L}^2 r_g^2/r^2). \quad (2.8.4)$$



Это выражение иногда называют *эффективным потенциалом*. Типичная кривая (2.8.4) для фиксированного $\tilde{L}$ изображена на рис. 15.

Движение частицы происходит с постоянной удельной энергией и изображается на рис. 15 горизонталью. Так как числитель (2.8.1) должен быть положительным, то отрезок горизонтали, изображающей движение частицы, лежит выше кривой (2.8.4). Пересечение горизонтали с эффективным потенциалом определяет точки наибольшего приближения к черной дыре и наибольшего удаления от нее. Траектория движения частицы не является коническим сечением и, вообще говоря, не замкнута. На рис. 15 приведены горизонталь для типичных движений. Горизонталь $\tilde{E}_1 < 1$ отвечает движению в ограниченной области пространства между r_1 и r_2 — аналог эллиптического движения ньютоновской теории (пример такой траектории показан на рис. 16а)*). Горизонталь $\tilde{E}_2 > 1$ соответствует приходу частицы из бесконечности и уходу снова на бесконечность (аналог гиперболического движения). Пример траектории показан на рис. 16б.

Наконец, горизонталь $\tilde{E}_3$ не пересекает потенциальной кривой, проходя выше ее максимума $\tilde{E}_{\max}$, и соответствует падению частицы в черную дыру (гравитационный захват). Этот тип движения не существует в ньютоновской теории и характерен для черной дыры. Траектория такого движения показана на рис. 16с. Гравитационный захват (см. следующий параграф) возможен из-за наличия максимума в эффективном потенциале. Такого максимума нет на соответствующей кривой ньютоновской теории.

Кроме перечисленных выше движений возможно еще движение частицы вблизи черной дыры, соответствующее горизонтالي $\tilde{E}_4$ на рис. 15. Эта горизонталь может лежать как ниже, так и выше единицы (последнее — в случае $\tilde{E}_{\max} > 1$), простираясь от r_g до пересечения с кривой $\tilde{E}(r)$. Она изображает движение частицы, которая, например, сначала удаляется от черной дыры, достигает $r_{\max}$ (в точке пересечения $\tilde{E}_4$ и $\tilde{E}(r)$), а затем вновь падает к черной дыре и поглощается ею (рис. 16д).

*) Если вся орбита лежит достаточно далеко от черной дыры, то она представляет собой эллипс, медленно поворачивающийся в плоскости движения.

Чтобы уйти на бесконечность, тело должно иметь энергию $\tilde{E} \geq 1$. Из уравнения (2.8.3) находим, что выражение для второй космической скорости есть ($v_{2\text{косм}}$ соответствует $\tilde{E} = 1$)

$$v_{2\text{косм}} = c\sqrt{r_g/r} = \sqrt{2GM/r}, \quad (2.8.5)$$

что совпадает с выражением ньютоновской теории.

Заметим, что в ньютоновской теории в поле точечной массы вторая космическая скорость гарантирует уход на бесконечность независимо от

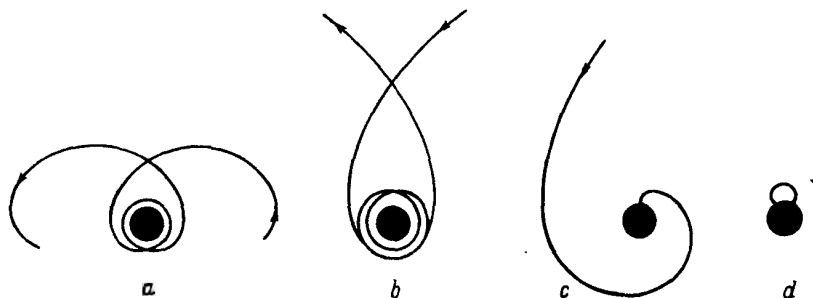


Рис. 16. Траектории частицы с энергиями $\tilde{E}_1$ (a), $\tilde{E}_2$ (b), $\tilde{E}_3$ (c) и $\tilde{E}_4$ (d)

направления движения. В случае черной дыры это не так. Здесь возможны траектории, заканчивающиеся в черной дыре (типа $\tilde{E}_4$ или $\tilde{E}_3$ на рис. 15, последняя — если частица движется к черной дыре). Это явление выше мы называли гравитационным захватом.

Важным частным случаем движения частицы вокруг черной дыры является движение по окружности. При этом тождественно $dr/dt \equiv 0$. На рис. 15 такое движение изображается точкой в экстремуме кривой эффективного потенциала. Положение точки в минимуме соответствует устойчивому движению, в максимуме — неустойчивому. Последнее движение не имеет аналога в ньютоновской теории и специфично для черной дыры. Реальное движение точки с $\tilde{E}$, равной $\tilde{E}_{\text{max}}$ для данного $\tilde{L}$, т.е. по неустойчивой кривой орбите, конечно, невозможно, как и всякое неустойчивое движение. Однако, если движение частицы изображается горизонталью $\tilde{E} = \text{const}$, подходящей близко к $\tilde{E}_{\text{max}}$, то частица будет совершать много оборотов вокруг черной дыры при r , соответствующем положению $\tilde{E}_{\text{max}}$, прежде чем орбита удалится от этого значения r . Примером такого движения может служить орбита на рис. 16b.

Форма и положение потенциальной кривой $\tilde{E}(r)$ — разные для разных $\tilde{L}$; соответствующие кривые для некоторых значений $\tilde{L}$ показаны на рис. 17.

Минимумы и максимумы $\tilde{E}(r)$ имеются на кривых с $\tilde{L} > \sqrt{3}$. При $\tilde{L} < \sqrt{3}$ кривая $\tilde{E}(r)$ монотонна. Таким образом, движение по круговым орбитам возможно лишь для $\tilde{L} > \sqrt{3}$. При этом минимумы кривых лежат при $r > 3r_g$. Следовательно, устойчивые круговые орбиты могут существовать лишь для $r > 3r_g$ [Хаджихара (1931)]. Ближе этого расстояния имеются только

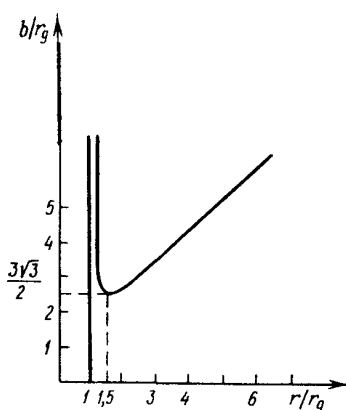
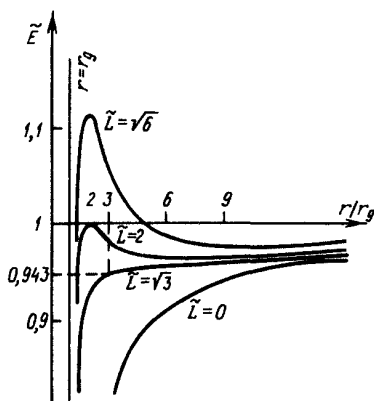


Рис. 17. Эффективный потенциал для разных значений $\tilde{L}$

Рис. 18. Положение экстремумов по r траектории ультрарелятивистской частицы в зависимости от прицельного расстояния b

неустойчивые круговые орбиты, соответствующие максимумам кривых $\tilde{E}_{\max}$. При $\tilde{L} \rightarrow \infty$ координаты максимумов $\tilde{E}_{\max}$ уменьшаются до $r = 1.5 r_g$. Ближе к $1.5 r_g$ невозможны даже неустойчивые круговые движения.

Критической круговой орбите, отделяющей устойчивые движения от неустойчивых, соответствует $r = 3r_g$. Скорость движения частиц по ней $v = c/2$. Энергия частицы при этом $\tilde{E} = \sqrt{8/9} \approx 0.943$. Это движение с максимальной возможной энергией связи $E \approx 0.057 mc^2$. При круговом движении по (неустойчивым) орбитам с $r < 3r_g$ скорость v растет с уменьшением r от $c/2$ до c на последней круговой орбите при $r = 1.5 r_g$. При движении с $r = 2r_g$ энергия частицы $\tilde{E} = 1$ и, следовательно, значение круговой скорости совпадает со значением второй космической скорости. При еще меньших r последняя по величине меньше круговой. Никакого парадокса в этом нет, ибо круговое движение здесь неустойчиво, и малейшее возмущение (дающее импульс по направлению от черной дыры) переводит частицу на орбиту, уходящую в бесконечность, т.е. соответствующую гиперболическому движению.

Рассмотрим движение ультрарелятивистской частицы. Оно соответствует в (2.8.1), (2.8.2) пределу $v \rightarrow c$, и поэтому $\tilde{E} \rightarrow \infty$ и $\tilde{L} \rightarrow \infty$. При этом надо помнить, что отношение $\tilde{E}/\tilde{L}$ всегда равно отношению r_g/b , где b — прицельное расстояние частицы на бесконечности. Учтя это, получаем вместо (2.8.1), (2.8.2)

$$\left(\frac{dr}{c dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right] \quad (2.8.6)$$

$$\frac{d\varphi}{c dt} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{b}{r^2}. \quad (2.8.7)$$

Формулы (2.8.6), (2.8.7) описывают искривление траектории ультрарелятивистской частицы и луча света, движущихся вблизи черной дыры.

Приравнивая квадратную скобку в (2.8.6) нулю, получаем положение точек экстремумов траектории как функцию радиуса r . Соответствующая кривая $b(r)$ показана на рис. 18. Знак b зависит от направления облета; будем считать b положительным. Движение ультрарелятивистской частицы с заданным b изображается на этом рисунке горизонталью $b = \text{const}$. Частица приближается к черной дыре, огибает ее на минимальном расстоянии, соответствующем точке пересечения $b = \text{const}$ с правой ветвью кривой $b(r)$, и снова улетает в бесконечность. Если пересечение происходит вблизи минимума $b_{\min} = 3\sqrt{3} r_g/2$, то частица может сделать много оборотов, прежде чем улетит в бесконечность. Точно минимуму кривой $b(r)$ соответствует (неустойчивое) движение по кругу с радиусом $r = 1.5 r_g$ со скоростью $v = c$. Заметим, что левая ветвь $b(r)$ на рис. 18 соответствует максимальному удалению ультрарелятивистской частицы, движущейся вблизи черной дыры и сначала удаляющейся от нее до $r < 1.5 r_g$, а потом снова падающей к ней. При этом параметр b , разумеется, не имеет прямого смысла прицельного расстояния на бесконечности, так как частица никогда на бесконечность не уходит. Этот параметр может быть выражен при заданной координате r через тангенс угла ψ между траекторией частицы и направлением на центр черной дыры:

$$b = \frac{r |\operatorname{tg} \psi|}{\sqrt{(1 - r_g/r)(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)}}. \quad (2.8.8)$$

Если ультрарелятивистская частица подлетает к черной дыре из бесконечности и параметр b меньше критического значения $b_{\min} = 3\sqrt{3} r_g/2$, то такая частица попадает в черную дыру.

§ 2.9. Гравитационный захват

В этом параграфе мы рассматриваем движение пробной частицы, при котором ее траектория заканчивается в черной дыре. Такое движение может быть двух типов. Во-первых, траектория частицы начинается в бесконечности и заканчивается в черной дыре; во-вторых, траектория начинается и заканчивается в черной дыре. Разумеется, вылететь из черной дыры частица не может. Поэтому движение по траектории второго типа возможно только при выведении частицы на эту траекторию по негеодезической кривой или при рождении частицы вблизи черной дыры *).

Особый интерес представляет гравитационный захват частицы, прилетающей из бесконечности. Обсудим этот случай.

Как ясно из разобранных в предыдущем параграфе особенностей движения, для захвата необходимо, чтобы при заданном $\tilde{L}$ прилетающей из бесконечности частицы ее энергия была больше максимума $(\tilde{E}_{\max})$ кривой $\tilde{E}(r)$. Рассмотрим гравитационный захват для двух предельных случаев — для частицы, имеющей на бесконечности скорость много меньше световой ($v_\infty/c \ll 1$), и для ультрарелятивистской на бесконечности частицы.

* Конечно, частица может вылететь из белой дыры и упасть в черную — в случае, рассмотренном в § 2.7.

В первом случае $\tilde{E} = 1$. Кривая $\tilde{E}(r)$, имеющая $\tilde{E}_{\max} = 1$, соответствует $\tilde{L}_{\text{сг}} = 2$ (см. рис. 17). Максимум этой кривой лежит при $r = 2r_g$. Значит, этот радиус является минимальным для периастров орбит частиц с $v_\infty = 0$, приходящих к черной дыре и снова уходящих на бесконечность. При $\tilde{L} \leq 2$ происходит гравитационный захват. Следовательно, прицельное расстояние, соответствующее захвату, $b_{\text{сг}} = \tilde{L}_{\text{сг}}/\tilde{E} = 2r_g(v_\infty/c)$. Сечение захвата нерелятивистской частицы

$$\sigma_{\text{нерел}} = \pi b_{\text{сг}}^2 = 4\pi(v_\infty/c)^2 r_g^2. \quad (2.9.1)$$

Для ультрарелятивистской частицы $b_{\text{сг}} = 3\sqrt{3}r_g/2$ и сечение захвата

$$\sigma_{\text{рел}} = \frac{27}{4} \pi r_g^2. \quad (2.9.2)$$

В связи с возможностью гравитационного захвата не всякая частица, имеющая скорость больше второй космической, улетает в бесконечность. Для этого надо еще, чтобы угол ψ между направлением на центр черной дыры и траекторией движения был больше некоторого критического значения $\psi_{\text{сг}}$. Этот критический угол для скорости, равной второй космической, дается выражением

$$\text{tg } \psi_{\text{сг}, 2\text{косм}} = \pm \frac{2\sqrt{(1 - r_g/r)r_g/r}}{\sqrt{1 - 4r_g/r(1 - r_g/r)}}. \quad (2.9.3)$$

Знак плюс выбирается для $r > 2r_g$ ($\psi_{\text{сг}} < 90^\circ$), знак минус — для $r < 2r_g$ ($\psi_{\text{сг}} > 90^\circ$).

Критический угол для ультрарелятивистской частицы определяется выражением

$$\text{tg } \psi_{\text{сг}, \text{рел}} = \pm \frac{\sqrt{1 - r_g/r}}{\sqrt{r_g/r - 1 + \frac{4}{27}(r/r_g)^2}}. \quad (2.9.4)$$

Знак плюс выбирается для $r > 1.5r_g$, знак минус — для $r < 1.5r_g$.

§ 2.10. Движение частиц с учетом гравитационного излучения

Небесная механика в релятивистской теории отличается от ньютоновской, помимо уже рассмотренных особенностей, еще излучением гравитационных волн ускоренно движущимся телом. Вследствие этого энергия $\tilde{E}$ и угловой момент $\tilde{L}$ не являются строгими интегралами движения.

Излучение гравитационных волн вызывает торможение движущейся частицы (потерю энергии и углового момента). Сила торможения связана со взаимодействием пробной частицы массы m с собственным гравитационным полем и пропорциональна m^2 , в то время как взаимодействие с внешним полем пропорционально mM . Поэтому при малых m/M сила "лучистого трения" является малой поправкой к основной силе и движение пробной частицы мало отличается от движения по геодезической.

Однако за длительные промежутки времени эти малые изменения могут, накапливаясь, приводить к существенному отклонению движения частицы от первоначальной траектории.

Мы рассмотрим изменение сечения захвата черной дырой пробной частицы, летящей из бесконечности, при учете гравитационного излучения и процесс постепенного захвата тела, движущегося по круговым орбитам [Зельдович, Новиков (1964*, 1971*)].

Расчет гравитационного излучения проводится методом анализа малых возмущений метрики Шварцшильда [Зерилли (1970a), Девис и др. (1971)]. Он показывает, что оценки изменения движения, сделанные по теории слабого поля и для нерелятивистских скоростей, во всех интересных случаях являются хорошим приближением*).

Рассмотрим случай изменения сечения захвата для частицы, летящей из бесконечности. Гравитационное излучение, происходящее главным образом в периастре орбиты, приводит к тому, что частица после облета черной дыры может уже не удалиться снова в бесконечность (как было бы без излучения), а перейти на связанную вытянутую орбиту, двигаясь по которой, она снова вернется к черной дыре, снова излучит в периастре и т.д., пока не упадет в нее. С учетом этой возможности сечение захвата для частицы масс m , имеющей скорость v_∞ на бесконечности, дается следующей приближенной формулой:

$$\sigma_{\text{грав. изл}} \approx \pi \left(\frac{c}{v_\infty} \right)^2 (2x)^{2/7} r_g^2, \quad x \gg 2^6, \quad (2.10.1)$$

где $x = \frac{c^3}{v_\infty^2} \frac{m}{M}$. При $x \lesssim 2^6$ сечение совпадает с (2.9.1) для нерелятивистской частицы.

После первого облета черной дыры на расстоянии r_1 в периастре частица удаляется на максимальное расстояние (апоастр), определяемое приближенной формулой

$$l_{\text{max}} \approx \frac{r_g}{2 \left[\frac{m}{M} \left(\frac{r_g}{r_1} \right)^{3/5} - \frac{v_\infty^2}{2c^2} \right]}. \quad (2.10.2)$$

Для малых r_1 при последующих облетах l_{max} быстро уменьшается. В конце концов частица падает в черную дыру.

Рассмотрим теперь влияние гравитационного излучения на круговое движение частицы. Если частица движется при $r \gg r_g$, в результате излучения радиус орбиты постепенно уменьшается по следующему закону [Ландау, Лифшиц (1973*)]:

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{8}{5} c \left(\frac{m}{M} \right) \left(\frac{r_g}{r} \right)^3. \quad (2.10.3)$$

Так продолжается до последней устойчивой круговой орбиты с $r = 3r_g$. На этой орбите энергия связи $E \approx 0,057 mc^2$ (см. с. 33). Она высвечивается в течение всего предыдущего движения. За один оборот на критической окружности $r = 3r_g$ высвечивается примерно $\Delta E \approx 0,1 mc^2 (m/M)$. Затем частица переходит на спиральную орбиту падения к дыре, совершая еще $\approx (M/m)^{1/3}$ оборотов вокруг нее. Количество излученной при этом энергии много меньше излученной ранее (до достижения $r = 3r_g$).

*) Сам процесс излучения в теории сильного поля черной дыры рассмотрен в следующей главе.

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ ВОКРУГ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

§ 3.1. Слабые поля в метрике Шварцшильда

В этой главе мы опишем эволюцию физических полей во внешнем поле сферической черной дыры. Зная эту эволюцию, можно с успехом изучать различного рода процессы, связанные с черными дырами. К таким процессам относятся, например, излучение гравитационных, электромагнитных и других волн частицами, падающими в черную дыру, несферический гравитационный коллапс при ее образовании, рассеяние ею падающих извне волн разной природы и т.д.

Мы будем считать поля слабыми в том смысле, что их тензор энергии-импульса слабо искажает метрику черной дыры, и будем пренебрегать этим обратным влиянием на фоновую метрику.

Далее, мы остановимся здесь только на "классических" полях с нулевой массой покоя и целочисленным спином (для других полей будет указана литература). Разумеется, следуя общему плану книги, в этой главе мы рассматриваем только классическую теорию полей, оставляя обсуждение квантовой теории до гл. 9, 10.

Мы приведем постановку задачи, укажем метод ее решения и физические выводы. Полная математическая трактовка вопроса дана в книге Чандрасекара (1983), физически ясное изложение основных положений — в книге Мизнера, Торна, Уилера (1973) и в обзоре Торна (1972).

Особый интерес представляют гравитационные возмущения метрики Шварцшильда, которые являются частным случаем рассматриваемых здесь полей. Мы остановимся на них подробно в §§ 3.2 и 3.3. Изложение физики этого вопроса особенно четко дано в обзоре Торна (1976).

Рассмотрение поведения неклассических полей (нейтринного, пионного и т.д.) читатель найдет в работах Хартля (1971, 1972), Тетельбойма (1972a, b, c), Бекенштейна (1972a, b), Детвилера (1980), Сибгатуллина (1984*), Чандрасекара (1979b, 1983).

В книге Сибгатуллина (1984*), помимо эволюции нейтринных полей, излагаются многие аспекты математической теории волновых процессов вблизи черной дыры. Особое внимание уделяется электрически заряженным черным дырам, о чем мы будем говорить позже (см. гл. 8). В указанных работах имеется подробная библиография оригинальных статей.

Рассмотрим слабое поле нулевой массы покоя и с целочисленным спином s во внешней метрике Шварцшильда. Для $s = 2$ это слабые гравитационные возмущения на фоне метрики.

Оказывается, для каждого поля можно найти полный набор калибровочно-инвариантных динамических переменных — функций $\Phi^{(s)}$, определенных во внешнем пространстве-времени черной дыры, таких, что

(1) $\Phi^{(s)}$ и $\partial\Phi^{(s)}/\partial t$ могут быть произвольно заданы в начальный момент;
 (2) после задания (1) эволюция $\Phi^{(s)}$ полностью определяется одним волновым уравнением;

(3) известные $\Phi^{(s)}$ позволяют вычислить все параметры исследуемого поля путем применения к $\Phi^{(s)}$ дифференциальных операторов и алгебраических преобразований;

(4) известен метод, по которому по заданным параметрам исследуемого поля (в любой калибровке) можно найти $\Phi^{(s)}$.

Знание $\Phi^{(s)}$ эквивалентно знанию эволюции исследуемого поля. Таким образом, задача сводится к нахождению $\Phi^{(s)}$. Полное решение этой задачи было получено в результате усилий многих физиков – см. Редже, Уилер (1957), Эдельштейн, Вишневшвара (1970), Зерилли (1970 а, б), Прайс (1972 а, б), Торн (1972), Пресс, Бардин (1971), Бардин, Пресс (1973), Монкриф (1974 а), Чандрасекар, Детвилер (1975 а). Современное изложение этого вопроса см. в книге Чандрасекара (1983).

Общий путь решения состоит в следующем. Рассматриваемое поле разлагается на сферические гармоники (для $s = 0$ это скалярные гармоники, для $s = 1$ – векторные, для $s = 2$ – тензорные и т.д.). Каждая сферическая гармоника характеризуется, в частности, номером мультиполя l . Для монополя $l = 0$, для диполя $l = 1$ и т.д. Мультиполи с $l < s$ не эволюционируют со временем, и мы будем рассматривать нетривиальные мультиполи с $l \geq s$. Эти мультиполи носят название радиационных.

Прайс (1972 а, б) показал, что для каждого радиационного мультиполя любого поля со спином s существует скалярное поле $\Phi_l^{(s)}$, зависящее только от r и t , такое, что его дифференцированием и алгебраическими операциями можно получить все компоненты исходного поля данной мультипольности. Каждая такая скалярная функция $\Phi_l^{(s)}$ удовлетворяет уравнению [см. также (3.2.1)]

$$\frac{\partial^2 \Phi_l^{(s)}}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2 \Phi_l^{(s)}}{c^2 \partial t^2} = V_l^{(s)}(r) \Phi_l^{(s)}, \quad (3.1.1)$$

где $V_l^{(s)}(r)$ – эффективный потенциал, определяющий эволюцию поля $\Phi^{(s)}$. Этот эффективный потенциал зависит от l и s (и, конечно, также от r и M).

Для скалярного, векторного и тензорного полей соответственно

$$V_l^{(0)} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\frac{r_g}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right], \quad (3.1.2a)$$

$$V_l^{(1)} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad (3.1.2b)$$

$$V_l^{(2)} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[-\frac{3r_g}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right]. \quad (3.1.2c)$$

Несмотря на разную форму этих потенциалов, они не сильно отличаются друг от друга, их асимптотики при $r \rightarrow r_g$ и $r \rightarrow \infty$ и другие свойства, определяющие эволюцию волновых полей, сходны. Поэтому эволюция радиационных мультиполей с разными s также оказывается сходной. Вследствие этого для многих задач достаточно рассмотреть поведение какого-либо одного поля.

Как мы уже говорили, особый интерес представляет исследование поведения гравитационных возмущений метрики Шварцшильда, являющих собой гравитационные волны, т.е. частный случай поля со спином $s = 2$.

Остановимся на этом случае более подробно.

§ 3.2. Гравитационные возмущения метрики Шварцшильда

Рассмотрим малые возмущения шварцшильдовской метрики, следуя в основном анализу Торна (1976).

В соответствии с общим подходом, изложенным в § 3.1, произвольное возмущение метрики может быть разложено по тензорным сферическим гармоникам, характеризующимся числами l, m (где $|m| \leq l$), а также четностью $\pi = (-1)^l$ для "четных" и $\pi = (-1)^{l+1}$ для "нечетных" возмущений.

Возмущение с $l = 0$ описывает изменение массы черной дыры. Возмущение с $l = 1$ описывает добавление малого углового момента (вращения черной дыры); мы остановимся на этом позже*). Оба эти типа возмущений не эволюционируют со временем.

Рассмотрим радиационные мультиполи с $l \geq s$. Для анализа удобно ввести новую радиальную координату [Уилер (1955)]

$$r_* = r + r_g \ln(r/r_g - 1). \quad (3.2.1)$$

При фиксированных $l \geq 2, m, \pi$ имеется единственная динамическая переменная Φ , зависящая только от r_*, t и l (индексы у Φ мы опускаем), которая в отсутствие источников поля удовлетворяет уравнению Редже – Уилера (1957):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_*^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t^2} = V^{(2)} \Phi, \quad (3.2.2)$$

где $V^{(2)}$ задается (3.1.2с). Переменная r_* меняется от $-\infty$ (когда $r \rightarrow r_g$) до $+\infty$ (когда $r \rightarrow \infty$). Потенциал $V^{(2)}$, записанный в координатах r_* , обладает следующими свойствами: он заметно отличается от нуля только при r_* в окрестности нуля ($r \approx 1,5 r_g$); при $r_* \rightarrow \pm \infty$ он быстро убывает. Таким образом, $V^{(2)}(r_*)$ имеет характер потенциального барьера. Поэтому уравнение (3.2.2) описывает одномерное прохождение волны через потенциальный барьер. Свойства решения этой задачи хорошо известны. Волны с длиной, много меньшей ширины барьера ($\lambda \ll r_g$), свободно проходят сквозь него. Волны с $\lambda \approx r_g$ частично проходят сквозь барьер, частично отражаются. Наконец, волны с $\lambda \gg r_g$ полностью отражаются от барьера.

Для волны частоты ω (частоты ω , вообще говоря, комплексные, мнимая часть описывает затухание или нарастание амплитуды волны) зависимость от времени определяется множителем $e^{i\omega t}$. Для каждого радиационного мультиполя $l \geq 2$ и некоторых специальных значений частот ω существуют решения уравнений (3.2.2), в которых нет входящих волн ни с $r_* = -\infty$,

*) Мы не рассматриваем здесь нефизическое возмущение, связанное с малым изменением положения черной дыры как целого в данной системе отсчета.

Таблица 1

	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
ω	$0,37367 + 0,08896 i$ $0,34844 + 0,27469 i$	$0,59945 + 0,09271 i$ $0,58201 + 0,28116 i$ $0,42629 + 0,37273 i$	$0,80918 + 0,09416 i$ $0,79657 + 0,28439 i$ $0,56010 + 0,42329 i$

ни с $r_* = +\infty$. Это так называемые *квазинормальные моды* колебаний черной дыры. Соответствующие частоты называются *собственными частотами*. На существование таких решений было указано Чандрасекаром и Детвилером (1975а). В этой же работе они нашли собственные частоты для нескольких мультиполей, приведенные в табл. 1. (Эти частоты выражены в единицах $[GM/c^3]^{-1} = 2\pi (32\,312 \text{ Гц}) (M/M_\odot)^{-1}$.) Все перечисленные в таблице собственные частоты имеют положительные мнимые части. Это означает, что колебания затухают с течением времени. Если $\omega = \sigma + \alpha i$, то зависимость от времени определяется в виде $e^{i\omega t} = e^{i\sigma t - \alpha t}$ и затухание амплитуды колебаний при фиксированном r_* записывается так:

$$\frac{\text{амплитуда после одного колебания}}{\text{начальная амплитуда}} = \exp\left(-\frac{2\pi\alpha}{\sigma}\right). \quad (3.2.3)$$

Для самой медленно затухающей моды $l = 2$ это отношение равно 0,22. Затухающие Ф-волны собственных колебаний частично уходят на бесконечность ($r_* = +\infty$), частично — в черную дыру ($r_* = -\infty$).

Как мы увидим далее, собственные колебания черной дыры интенсивно возбуждаются падающими в нее телами, возникают при несимметричном гравитационном коллапсе, образующем первоначально несимметричную черную дыру, которая с течением времени приходит в равновесное симметричное состояние (после осцилляций), и т.д.

Если в собственных частотах $\alpha > 0$, то осцилляции затухают; если $\alpha < 0$, то они нарастают. Последнее означает неустойчивость в собственных частотах в линейном приближении.

В приведенной выше таблице все $\alpha > 0$. Можно показать [см., например, Торн (1976)], что $\alpha > 0$ для всех собственных частот. Однако это еще не означает, что сферические черные дыры устойчивы (в линейном приближении), так как квазинормальные моды не образуют полного набора динамических переменных. Но оказывается, что стабильность (в линейном приближении) сферической черной дыры может быть доказана для каждой мультипольной моды (т.е. для фиксированных l, m, π) возмущений с помощью уравнений (3.2.2) [Торн (1976)]. Более того, можно показать [Торн (1976), Монкриф (1974а, б), Уолд (1979а, 1980), Чандрасекар (1983)], что всякое малое возмущение гравитационного поля вокруг сферической черной дыры с течением времени затухает. Гравитационные волны уносят это возмущение частично на бесконечность, частично — в черную дыру. Стабильность черной дыры для любой моды возмущений означает ее полную стабильность (естественно, в линейном приближении).

Гравитационное излучение, возникающее при возмущении поля черной дыры, например, при падении в нее тел или при образовании ее при слабо несимметричном коллапсе, можно разделить (условно) на три компоненты:

- 1) излучение, идущее непосредственно от источника возмущений;
- 2) излучение, возникающее при затухающих колебаниях квазинормальных мод, возбужденных источником возмущений, — "звоновое" излучение;
- 3) так называемые "хвосты" излучений, которые вызваны рассеянием гравитационных волн на эффективном потенциале.

После прохождения излучения от источника наблюдатель вдали от черной дыры регистрирует "звоновое" излучение от квазинормальных мод колебаний черной дыры (эти моды испытывают экспоненциальное затухание) и затем "хвосты" излучения. Последние затухают значительно медленнее — уже по степенному закону. Такой закон и является асимптотикой приближения черной дыры к равновесному состоянию. Ниже мы остановимся на этом подробнее (см. § 3.4); здесь же отметим, что амплитуда "хвостового" излучения ничтожна по сравнению с первыми двумя составляющими.

§ 3.3. Гравитационное излучение пробной частицы в поле черной дыры

Один из простейших видов возмущений — движение пробной частицы с массой $m \ll M$ в поле тяготения черной дыры. Во всех случаях мы будем считать m/M настолько малым, что можно пренебречь обратным влиянием излучения на движение частицы.

Рассмотрим сначала гравитационное излучение частицы, падающей в черную дыру по радиусу с параболической скоростью ($v_\infty = 0$). На рис. 19 и 20 приведены результаты численных расчетов Девиса и др. (1971, 1972); см. также Петрич и др. (1985).

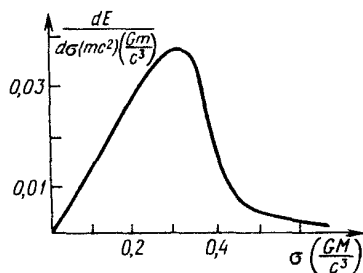


Рис. 19. Спектр гравитационного излучения частицы (усредненный по всем направлениям), падающей радиально в черную дыру с $v_\infty = 0$

На рис. 19 изображен спектр гравитационного излучения, усредненного по всем направлениям, измеряемый удаленным наблюдателем. Полное количество излученной энергии составляет $\Delta E = 0,01 mc^2 (m/M)$.

Рис. 20 показывает поле гравитационной волны (поперечные компоненты возмущений метрики) как функцию времени при фиксированном r . На рисунке ясно видно, как всплеск излучения, прямо приходящего от падающей частицы, постепенно переходит (в окрестности $t = 0$) в излучение от квазинормальных мод колебаний (последующие затухающие осцилляции на графике). "Хвосты" излучения (которые должны доминировать при $t \rightarrow \infty$) имеют слишком малую амплитуду и не могли быть получены в данном численном расчете.

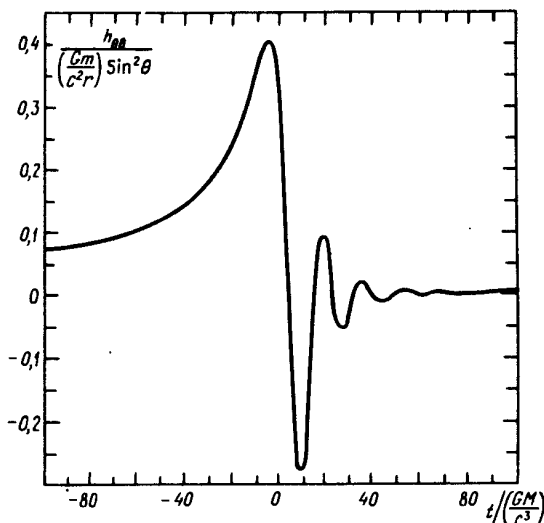


Рис. 20. Форма волны для $l = 2$ гравитационного излучения радиально падающей частицы с $v_\infty = 0$; направление $\theta = 0$ совпадает с траекторией частицы [по данным Петрич и др. (1985)]. Здесь и на других аналогичных рисунках знак h зависит от определения, может определяться разными авторами по-разному и непринципиален

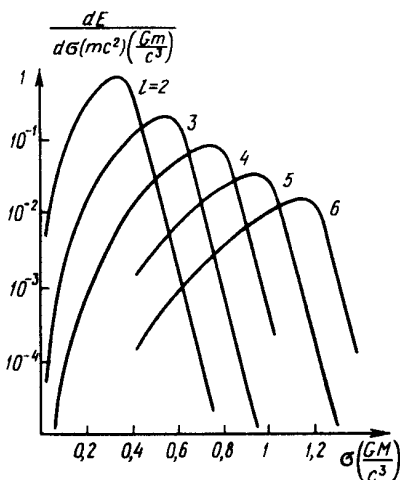


Рис. 21. Спектр полного гравитационного излучения частицы с $v_\infty = 0$ и $\tilde{L} = 1,75$ для разных мод

Хотя нельзя строго отделить излучение, прямо приходящее от источника, от "звонового" излучения, но по виду осцилляций эта граница лежит в районе $t \approx 0$. Можно констатировать, что основная доля энергии, излучаемой в результате падения частицы, приходится на "звоновое" излучение квазинормальных мод.

Рассмотрим теперь падение частицы, обладающей удельным угловым моментом $\tilde{L}$ и параболической скоростью [Детвилер, Сзедениц (1979), Оохара и Накамура (1983а, б)]. На рис. 21 показан энергетический спектр полного излучения для $\tilde{L} = 1,75$, а на рис. 22 — зависимость полной излученной энергии ΔE и углового момента ΔL от $\tilde{L}$. Напомним, что когда $\tilde{L} \rightarrow 2$, геодезическая орбита совершает много оборотов вокруг черной дыры, что и приводит к увеличению высвеченной энергии и углового момента. Для $\tilde{L} > 2$ высвеченная энергия и угловой момент вновь уменьшаются, частица уже не захватывается черной дырой, а вновь уходит на бесконечность (см. гл. 2). Чем больше $\tilde{L}$, тем дальше пролетает частица от окружности $r = 2r_g$ (см. рис. 17).

Необходимо подчеркнуть следующий факт, отмечавшийся в цитированных выше работах. Если частица падает в черную дыру, то возбуждаются

Рис. 22. Полные излученные энергия ΔE и угловой момент ΔL частицы с $v_\infty = 0$

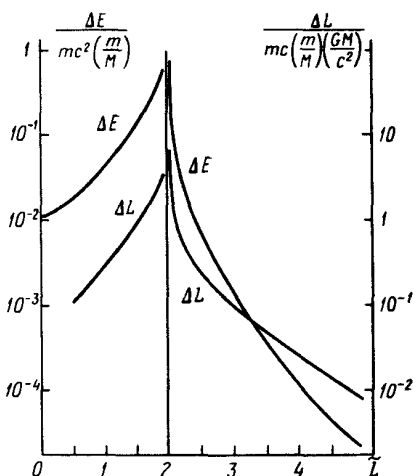
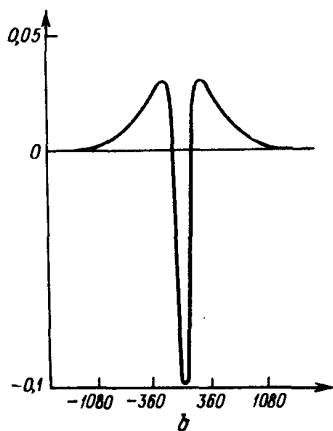
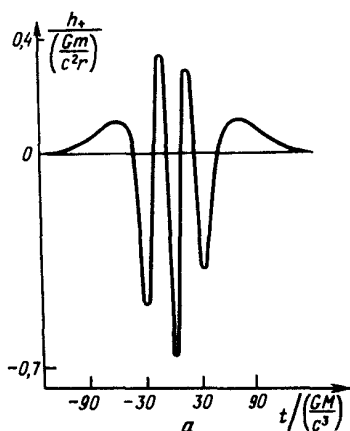


Рис. 23. Форма волны гравитационного излучения частицы с $v_\infty = 0$ и $\tilde{L} > 2$ для наблюдателя в плоскости орбиты $\theta = \pi/2$ и в направлении периастра ее траектории $\varphi = 0$: а) $\tilde{L} = 2,005$; в) $\tilde{L} = 2,5$. "Звоновое" излучение отсутствует



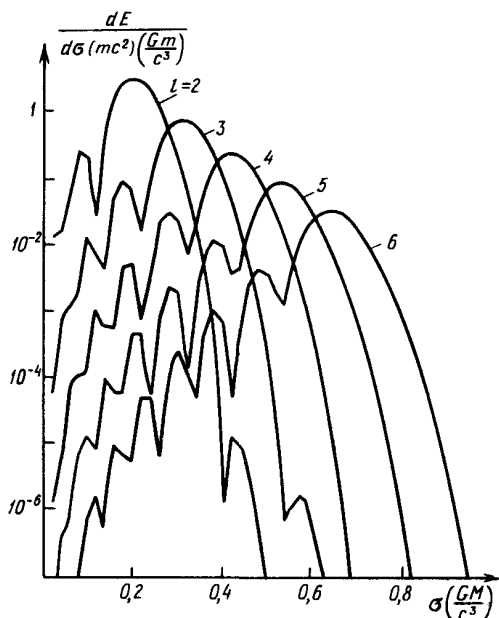


Рис. 24. Спектр излучения частицы с $\tilde{L} = 2,005$ и $v_{\infty} = 0$

квазинормальные моды колебаний и основная энергия излучения содержится именно в "звоновом" излучении, связанном с этими колебаниями. Если же частица не захватывается черной дырой, а вновь уходит на бесконечность (рассеивается черной дырой) и при этом не имеет большой энергии на бесконечности (не является релятивистской; см. об этом далее), то квазинормальные моды колебаний черной дыры не возбуждаются.

Это ясно видно на рис. 23а и особенно 23б, где возмущения гравитационного поля в волне выглядят совершенно симметрично и нет ничего подобного экспоненциально затухающим модам "звонового" излучения, ясно видимым на рис. 20. Об этом же свидетельствует и спектр излучения, показанный на рис. 24, для каждой из гармоник l . В случае возбуждения квазинормальных мод максимум спектра каждой из них определяется в значительной степени собственной частотой моды и не зависит от $\tilde{L}$. В случае рассеяния ($\tilde{L} > 2$) положение максимума каждой моды зависит от $\tilde{L}$. Положение максимума всего излучения определяется удвоенной угловой частотой движения частицы в периастре. Все это и означает, что "звонового" излучения практически нет.

Физическое объяснение отсутствия "звонового" излучения в случае рассеяния частицы черной дырой состоит в следующем. Периастр орбиты рассеиваемой частицы лежит вне потенциального барьера (который, напомним, находится при $r \approx 1,5r_g$), поскольку $r > 2r_g$. Поэтому возмущения от самой частицы не возбуждают этих мод. Гравитационное же излучение таких частиц имеет длину волны $\lambda \gg r_g$ и поэтому (см. § 3.2) отражается

от потенциального барьера, не проникает ближе к черной дыре и также не возбуждает квазинормальные моды.

Поэтому для расчета гравитационного излучения рассеиваемых частиц очень хорошим приближением служит стандартная формула [Ландау, Лифшиц (1973*)], которая справедлива для движений частиц с $v \ll c$ в плоском пространстве и не учитывает квазинормальные моды.

Излучение гравитационных волн при падении частицы обладает угловой асимметрией. Волны уносят часть импульса системы. На рис. 25 показан график зависимости излученного импульса от углового момента падающей частицы, а на рис. 26 — угол Φ между направлением входящей из бесконечности траектории и направлением полного импульса, излученного гравитационными волнами, как функция $\tilde{L}$.

Наконец, рассмотрим гравитационное излучение, возникающее в результате рассеяния черной дырой ультрарелятивистской частицы (v_∞ порядка c).

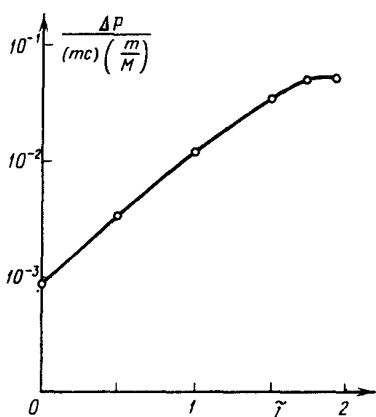


Рис. 25. Излучение импульса ΔP при падении частицы с $v_\infty = 0$ как функция $\tilde{L}$

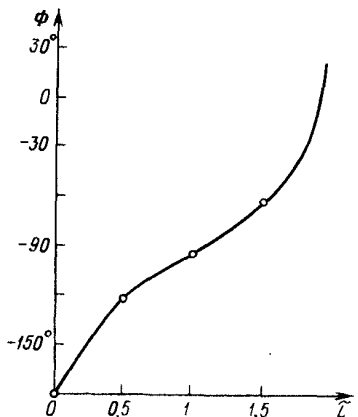


Рис. 26. Зависимость угла Φ от $\tilde{L}$ (см. текст)

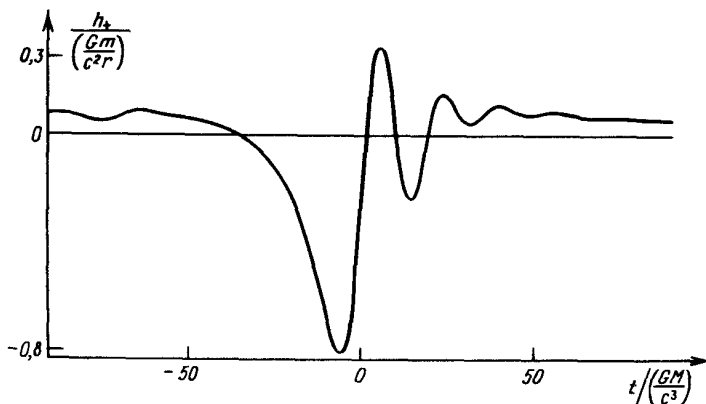


Рис. 27. Форма волны гравитационного излучения при $\theta = \pi/2$ и $\varphi = 0$ частицы с $(1 - v_\infty^2/c^2)^{-1/2} = 2$ и $\tilde{L} = 6,25$

Как показано в работе Оохары (1983), в таком случае квазинормальные моды колебаний черной дыры возбуждаются. Этому способствуют два обстоятельства.

Во-первых, периастр движения таких частиц может лежать ближе к черной дыре, чем в случае рассеяния с $v_\infty = 0$ (см. гл. 2). Он может даже оказаться ближе к ней, чем максимум потенциального барьера. Тогда идущая внутрь волна будет возбуждать колебания на собственных частотах.

Во-вторых, ультрарелятивистская частица излучает гравитационные волны на частотах, существенно больших, чем частота ее движения в периастре [эффект гравитационного синхротронного излучения — см., например, Дорошкевич и др. (1972*), Руффини (1973), Хржановский, Мизнер (1974), Тернов и др. (1975*)]. Волны высокой частоты с $\lambda < r_g$ могут проникать через барьер и возбуждать колебания квазинормальных мод.

В качестве примера на рис. 27 из работы Оохары (1983) показаны возмущения метрики в гравитационной волне для частицы с $(1 - v_\infty^2/c^2)^{-1/2} = 2$ и $\tilde{L} = 6,25$. В правой части графика ясно видно "звонное" излучение от квазинормальных мод, затухающее по экспоненте.

В заключение дадим ссылку на работы Шапиро и Вассермана (1982) и Петрич и др. (1985), в которых рассматривается излучение от протяженных источников, падающих на невращающуюся черную дыру.

§ 3.4. Степенные "хвосты" гравитационного излучения

Рассмотрим теперь асимптотику приближения возмущенного поля черной дыры к невозмущенному состоянию при $t \rightarrow \infty$ [Прайс (1972а, б), Торн (1972)].

Эта асимптотика определяется следующими процессами. Пусть к границе черной дыры падает источник возмущений. Это может быть, например, частица, падающая в черную дыру, или "рябь" на поверхности сжимающегося шара при формировании черной дыры.

Для исследования возмущений мы по-прежнему пользуемся техникой, описанной в § 3.2. Наша задача сводится к анализу асимптотики поведения функции Φ при больших временах $t \rightarrow \infty$. Источник возмущений приближается к границе черной дыры [$r_* = -\infty$; см. (3.2.1)] со скоростью, стремящейся к c (см. гл. 2). Это значит, что для наблюдателя, покоящегося в системе отсчета Шварцшильда, все процессы на источнике возмущений должны "застывать" при $t \rightarrow \infty$, подобно застыванию их на поверхности коллапсирующей звезды (см. гл. 2). К константе должно стремиться на источнике и поле Φ . Можно показать, что это застывание происходит по закону (для любого l -го мультиполя)

$$\Phi_l = Q_0 + Q_1 \exp\left(\frac{r_* - ct}{2r_g}\right), \quad (3.4.1)$$

где Q_0 и Q_1 — константы. Затухающая часть имеет характерное время изменения порядка r_g/c . Поэтому волны Φ_l этой частоты будут частично отражаться от потенциального барьера и идти вновь к черной дыре ($r_* = -\infty$), а частично проходить сквозь барьер и уходить на бесконечность ($r_* = \infty$). Постоянная же часть (Q_0) порождает возмущение бесконеч-

ной длины волны, которая полностью отражается барьером и не выходит к внешнему наблюдателю. Следовательно, к нему будут приходить непосредственно от источника возмущения только экспоненциально затухающие волны. Однако затухание всего излучения не будет экспоненциальным, так как оно связано с рассеянием первичных волн на "хвостах" потенциального барьера (т.е. на кривизне пространства). Прежде чем выяснять детально, к чему это ведет, рассмотрим подробнее прохождение волн через потенциальный барьер [Торн (1972)].

Пусть волна идет от дыры наружу (от $r_* = -\infty$ к $r_* = \infty$). Разложим $\Phi_l(t, r_*)$ в интеграл Фурье:

$$\Phi_l(t, r_*) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) R_k^l(r_*) e^{-ikt} dk. \quad (3.4.2)$$

Часть этой волны отражается, а часть проходит сквозь барьер. С помощью уравнений (3.2.2) и (3.1.2) можно показать, что общее решение для такой волны имеет следующий асимптотический вид для R_k^l :

$$R_k^l = e^{ikr_*} + \Gamma_k^{(R)} e^{-ikr_*} \quad \text{при } r_* \rightarrow -\infty, \quad (3.4.3)$$

$$R_k^l = T_k^{(R)} e^{ikr_*} \quad \text{при } r_* \rightarrow \infty, \quad (3.4.4)$$

где $\Gamma_k^{(R)}$ — коэффициент отражения, $T_k^{(R)}$ — коэффициент прохождения волны, идущей направо, т.е. от $r_* = -\infty$ к $r_* = \infty$ (индекс (R)). Для малых $|k| \ll 1/r_g$ вид коэффициентов следующий:

$$\Gamma_k^{(R)} = -1 + \alpha r_g i k, \quad (3.4.5)$$

$$T_k^{(R)} = \frac{\beta}{(2l-1)!!} (r_g i k)^{l+1}. \quad (3.4.6)$$

Здесь α и β — константы порядка единицы. При $k \rightarrow 0$ волны испытывают полное отражение.

Для волн, распространяющихся налево (от $r_* = \infty$ к $r_* = -\infty$, индекс (L)), можно получить аналогичное решение с коэффициентами

$$\Gamma_k^{(L)} = (-1)^{l+1} + \frac{\gamma}{(2l-1)!!} (r_g i k)^{2l+1}, \quad (3.4.7)$$

$$T_k^{(L)} = \delta (r_g i k)^{l+1}; \quad (3.4.8)$$

γ и δ — константы порядка единицы. При $k \rightarrow 0$ — снова полное отражение от барьера.

Вернемся теперь к закону затухания волн при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим область $r > 1,5 r_g$, т.е. вне потенциального барьера. Волны Φ от источника, частично прошедшие через барьер, испытывают рассеяние назад на "хвосте" потенциала при $r_* \ll r_g$. Эти волны доходят до $r_* \approx 0$, вновь отражаются от потенциального барьера и интерферируют с идущими назад волнами. Рассеяние назад и интерференция и определяют закон затухания. Он оказывается следующим:

$$\Phi_l \sim t^{-(2l+2)}. \quad (3.4.9)$$

В область $r_g < r < 1,5r_g$ также проникают волны, рассеянные на "хвосте" потенциала. В результате затухание в этой области определяется той же формулой (3.4.9).

Итак, асимптотика затухания радиационных мультиполей возмущений $l \geq 2$ гравитационного поля черной дыры при $t \rightarrow \infty$ определяется формулой (3.4.9). Напомним, что возмущение поля с $l = 1$ (соответствующее моменту импульса) не изменяется вообще (это нерadiационная мода). Все остальные мультиполи возмущений (т.е. с $l \geq 2$) полностью исчезают при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, при коллапсе слегка несимметричного тела без вращения возникает сначала слегка возмущенная черная дыра (со слегка возмущенной границей и возмущенным внешним полем), но эти возмущения все излучаются (частично наружу, частично внутрь черной дыры) и при $t \rightarrow \infty$ черная дыра в точности описывается метрикой Шварцшильда.

Этот же вывод справедлив и для полей со спином, отличным от двух. Все радиационные мультиполи таких полей ($l \geq s$) также излучаются и асимптотика их затухания определяется той же формулой (3.4.9). Прайс сформулировал этот вывод следующим образом: "Все, что может излучиться, излучается полностью".

Заметим в заключение, что вывод о неизбежности излучения радиационных мод поля с $s = 1$ (электромагнитного) был получен Гинзбургом (1964*), Гинзбургом и Озерным (1964*), а для поля с $s = 2$ (гравитационного) Дорошкевичем и др. (1965*), Новиковым (1969*).

§ 3.5. Сечение рассеяния волн черной дырой

Рассмотрим процесс рассеяния черной дырой проходящих из бесконечности плоских волн [Хандлер, Метцнер (1980)].

Напомним, что процесс рассеяния описывается так называемым дифференциальным сечением рассеяния. Например, в классической задаче рассеяния пучка параллельных лучей в приближении геометрической оптики

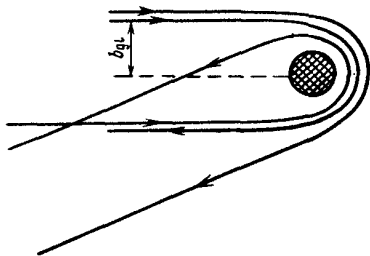


Рис. 28. Траектории лучей с прицельными параметрами, близкими к b_{gl} ("глюрия"-интерференция)

дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$ определяется следующим образом:

$$d\sigma = b \frac{db}{d\theta} (\sin \theta)^{-1} d\Omega, \quad (3.5.1)$$

где $b = b(\theta)$ — прицельный параметр луча, отклоняющегося в поле рассеивающего центра на угол θ от направления падающего пучка, $d\Omega$ — элемент телесного угла ($d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$).

Рис. 29. Дифференциальное сечение рассеяния гравитационного излучения невращающейся черной дырой для различных частот ω

В случае черной дыры и в пределе геометрической оптики зависимость $b = b(\theta)$ определяется уравнениями (2.8.6)–(2.8.7); в этом случае вычисление $d\sigma$ тривиально. Специальный интерес представляет волновая задача, где важен учет интерференции рассеянных волн и поглощения части волн черной дырой. Задача эта решается разложением падающих волн по сферическим гармоникам с последующим анализом рассеяния каждой из них на потенциальном барьере (см. § 3.1) и суммированием результатов.

Следуя упомянутой работе Хандлера, Метцера (1980), прежде всего посмотрим, каких качественных особенностей следует ожидать в поведении дифференциального сечения.

Первая особенность носит очевидный характер и связана с рассеянием вперед ($\theta \approx 0$). Когда волны рассеиваются на малый угол, это соответствует в полуклассическом приближении прохождению волны на большом расстоянии от дыры (большие b или большие l в разложении по сферическим гармоникам), и поэтому рассеяние происходит на кулоновском потенциале. Отклонение луча в этом случае $\theta \sim 1/b$. Подставляя эту зависимость в (3.5.1), получаем

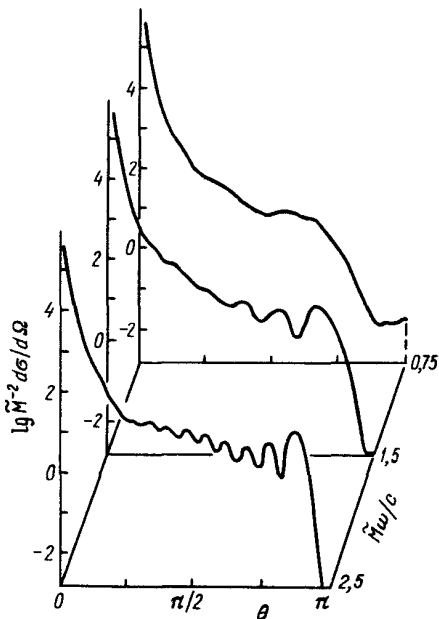
$$d\sigma/d\Omega \sim 1/\theta^4.$$

Другие особенности связаны с существованием в поле Шварцшильда круговой орбиты для безмассовых частиц и с возникновением специфических условий для интерференции волн при рассеянии на углы, близкие к $\theta = \pi$. Особенно важен и интересен последний случай — явление рассеяния назад, получившее название "глюрия" (сияние). Для шварцшильдовской черной дыры это явление проанализировано Метцнером и др. (1985). Суть его состоит в следующем.

На рис. 28 сплошной линией изображен луч, отклоняющийся точно на угол $\theta = \pi$. Соответствующий прицельный параметр — прицельный параметр "глюрии" b_{gl} — для черной дыры массы M равен

$$b_{gl} \approx 5,35 \tilde{M}. \quad (3.5.2)$$

Здесь обозначено $\tilde{M} \equiv GM/c^2$. Также на этом рисунке изображены лучи с b , мало отличающимися от b_{gl} , огибающие черную дыру с противоположных сторон и распространяющиеся после рассеяния параллельно друг



другу в направлении, близком к $\theta = \pi$. В этом случае разность хода лучей мала, возникает разность фаз, ведущая к интерференции.

Метцнер и др. (1985) решили задачу "глюрия"-рассеяния, используя обобщенное ВКБ-приближение. Их результат справедлив при $\tilde{M} \omega c^{-1} \gg 1$ (ω — частота волны) и $|\theta - \pi| \ll 1$. Для этих условий имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi^2 \lambda^{-1} b_{g1}^2 \left| \frac{db}{d\theta} \right| J_{2s}^2(2\pi \lambda^{-1} b_{g1} \sin \theta). \quad (3.5.3)$$

Здесь λ — длина волны, s — ее спин, J_{2s} — функция Бесселя порядка $2s$.

Подставляя в (3.5.3) численные значения $b_{g1} \approx 5,35 \tilde{M}$, $\left. \frac{db}{d\theta} \right|_{\theta=\pi} \approx -0,15 \tilde{M}$, получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx 8,58 \pi \omega \tilde{M}^3 c^{-1} J_{2s}^2(5,35 \omega \tilde{M} c^{-1} \sin \theta). \quad (3.5.4)$$

Если условия $\tilde{M} \omega c^{-1} \gg 1$ и $|\theta - \pi| \ll 1$ не выполняются, то сечение рассеяния не выражается в виде простой формулы и находится численным методом. На рис. 29 приведены результаты расчетов Хандлера, Метцнера (1980) для рассеяния гравитационных волн ($s = 2$) с $\tilde{M} \omega c^{-1} = 0,75; 1,5$ и $2,5$. На всех кривых видна особенность $d\sigma/d\Omega \sim \theta^{-4}$ при рассеянии вперед ($\theta \approx 0$).

Для $\tilde{M} \omega c^{-1} = 2,5$ уже ясно видна интерференционная картина "глюрия"-рассеяния назад ($\theta \approx \pi$). Сравнение результатов численного счета с формулой (3.5.4) для $\tilde{M} \omega c^{-1} = 2,5$ показывает хорошее согласие в положении и ширине ближайшего к $\theta = \pi$ "глюрия"-максимума. С увеличением частоты ω минимумы кривых при рассеянии точно назад становятся все более глубокими. Это связано с увеличением поглощения волн для малых l (что соответствует малым b) с увеличением частоты. В пределе $\omega \rightarrow \infty$ рассеяние гравитационных волн (и вообще любых волн с $s \neq 0$) точно назад дает $d\sigma/d\Omega = 0$.

Полные сечения поглощения для $\omega \tilde{M} c^{-1} = 0,75; 1,5$ и $2,5$ равны соответственно $72,4 \tilde{M}^2; 83,36 \tilde{M}^2$ и $83,61 \tilde{M}^2$. Напомним, что для $\omega \rightarrow \infty$ сечение поглощения составляет $27\pi \tilde{M}^2 \approx 84,81 \tilde{M}^2$.

О зависимости сечения рассеяния волн на шварцшильдовской черной дыре от их частоты см. также Санчес (1976, 1977, 1978а, б).

ВРАЩАЮЩАЯСЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА

§ 4.1. Возникновение вращающейся черной дыры

В предыдущих главах было показано, что при коллапсе сферической массы без вращения возникает сферическая черная дыра, когда радиус тела становится меньше гравитационного радиуса. Если коллапсирует тело с малым отклонением от сферической симметрии, то, как было показано в § 3.4, при образовании черной дыры все отклонения от сферической симметрии быстро исчезают, за исключением отклонений, связанных с наличием малого углового момента J . Угловой момент остается в ходе коллапса практически неизменным. Если коллапсирующее тело обладало электрическим зарядом, то неизменным остается и общий заряд, и связанное с ним электрическое поле, все же другие компоненты электромагнитного поля во внешнем пространстве также быстро исчезают.

Что будет при коллапсе тела с уже не малыми отклонениями от сферической симметрии и значительными угловым моментом и электромагнитным полем? Будет ли при этом образовываться черная дыра? А если будет, то каковы ее свойства?

В дальнейших главах мы покажем, что при сжатии произвольной вращающейся массы с электромагнитным полем до достаточно малых размеров возникает черная дыра, причем все свойства этой черной дыры и ее внешнего гравитационного и электромагнитного полей полностью определяются тремя параметрами: массой M , угловым моментом J и электрическим зарядом Q ^{*)}. Остальные свойства коллапсирующей массы, например ее состав, несимметрия распределения вещества и электрического заряда, наличие и особенности магнитного поля и т.д., не сказываются на свойствах возникающей черной дыры.

Качественно этот вывод понятен из анализа поведения малых возмущений при образовании сферической черной дыры (§ 3.4). Радиационные мультиполи всех полей быстро исчезают. Остаются только нерadiационные моды. Именно они определяются указанными тремя параметрами M , J , Q . Никакие другие "классические" физические поля с другими (нерadiационными) модами физике неизвестны. В ходе гравитационного коллапса с сильными отклонениями от симметрии возникающее гравитационное излучение уносит часть энергии и углового момента коллапсирующей массы. Поэтому M и J у черной дыры будут несколько меньшими, чем у тела до его коллапса (мы это обсудим в дальнейшем). Обнаружить подобное

^{*)} Как мы увидим в дальнейшем, для образования черной дыры должно выполняться неравенство $M^2 > J^2/M^2 + Q^2$ (система единиц выбрана так, что $G = c = 1$).

уменьшение при анализе малых возмущений было невозможно, так как мы пренебрегали обратным влиянием возмущений на метрику. В астрофизике общий электрический заряд тела можно обычно считать малым и не учитывать. Поэтому мы в первую очередь рассмотрим случай, когда заряд Q равен нулю. Случай отличного от нуля заряда рассмотрен в § 4.8.

Каково же гравитационное поле черной дыры при наличии углового момента J ? В § 6.4 будет доказано, что это поле описывается стационарным осесимметричным решением уравнений Эйнштейна, найденным Керром (1963). Мы начнем с описания физических свойств внешнего пространства вращающейся черной дыры.

§ 4.2. "3 + 1"-расщепление пространства-времени вне черной дыры

Во второй главе исследовались внешнее поле невращающейся черной дыры (поле Шварцшильда) и особенности движения частиц в нем. При этом использовалась система отсчета Шварцшильда. Она статична, не зависит от времени и однозначно определена для каждой черной дыры*). Ее можно представить в виде решетки, "сваренной" из невесомых твердых стержней. Движение частиц определялось по отношению к такой решетке. При этом в качестве временной переменной мы использовали время t наблюдателя на бесконечности. Правда, в каждой точке нашей решетки темп течения физического (собственного) времени τ не совпадал с темпом течения t (время вблизи черной дыры течет медленнее), но такая "параметризация" по t была очень удобна. В частности, условие $t = \text{const}$ означало одновременность во всей нашей системе отсчета.

В некотором смысле решетка системы отсчета Шварцшильда напоминает абсолютное ньютоновское пространство, в котором движутся тела, а t -- абсолютное ньютоновское время, используемое в уравнениях движения.

Конечно, есть существенные отличия. Наше "абсолютное" пространство искривлено (особенно сильно вблизи черной дыры), а "время" t не есть физическое время.

Использование именно такой системы отсчета не только удобно для математических выкладок при решении, скажем, уравнений движения, но и обладает большой наглядностью. Мы используем привычные нам понятия ньютоновской физики ("абсолютное" жесткое пространство как неизменная сцена, на которой разворачиваются события, единое время), что помогает работе нашей интуиции. И хотя система Шварцшильда обладает особенностью на r_g , мы используем для пространства-времени вне черной дыры именно ее, а не, допустим, систему Леметра, которая не имеет особенности при приближении к r_g , но которая везде деформируется.

Разумеется, выбор жесткой системы был возможен только потому, что пространство-время вне черной дыры статично. В общем случае в переменном гравитационном поле такой выбор невозможен, пространственная сетка будет деформироваться с течением времени.

*) На больших расстояниях от черной дыры эта система отсчета переходит в лоренцеву, в которой черная дыра покоится.

В случае метрики Керра, вращающейся черной дыры, пространство-время вне ее стационарно и возможен выбор неизменной во времени системы координат, асимптотически переходящей в лоренцеву систему на бесконечности. Такой системой координат являются координаты Бойера – Линдквиста (1967). Запишем метрику Керра в этих координатах:

$$ds^2 = - \frac{\rho^2 \Delta}{A} c^2 dt^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(d\varphi - \frac{2aGMr}{c^2 A} dt \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (4.2.1)$$

где

$$\rho^2 \equiv r^2 + \frac{a^2 \cos^2 \theta}{c^2}, \quad \Delta \equiv r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}, \quad (4.2.2)$$

$$A = \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} \right)^2 - \frac{a^2 \Delta \sin^2 \theta}{c^2};$$

a – удельный момент импульса ($a = J/M$), M – масса черной дыры. В дальнейшем мы будем пользоваться системой единиц, в которой $c = G = 1$. Физический смысл, по-видимому, имеют решения $M^2 > a^2$ (см. сноску на с. 51).

Свойства внешнего по отношению к черной дыре 3-мерного пространства $t = \text{const}$ в метрике (4.2.1) не меняются с течением времени. Это значит, что существует векторное поле Киллинга (см. Приложение), направленное по линиям времени t , сдвигая пространственное сечение вдоль которого, мы переходим от одного сечения к точно такому же другому. Таким образом, в пространстве можно "нарисовать" сетку, которая остается неизменной при переходе от одного сечения к другому вдоль векторного поля Киллинга*). Переменная t – время наблюдателя на бесконечности – может служить единым "временем", нумерующим пространственное сечение, как это было в случае пространства-времени Шварцшильда.

Однако имеются существенные различия.

1) В случае поля Шварцшильда, чтобы перейти от одного 3-мерного сечения к другому с неизменной координатной сеткой, сдвиг делался вдоль временных линий, перпендикулярных пространственному сечению. В поле Керра это не так, и векторное поле Киллинга наклонено к сечению $t = \text{const}$, причем для разных r и θ – наклон разный.

2) В точках, близких к границе черной дыры (см. с. 56), вектор Киллинга, осуществляющий переход от сечения к сечению, становится пространственноподобным. Это значит, что в таких областях трехмерную жест-

*) Векторное поле Киллинга мы выбрали так, что вдали от черной дыры (на бесконечности) вектор Киллинга направлен вдоль линий времени лоренцевой координатной системы, в которую переходит система (4.2.1). Эта оговорка необходима потому, что, помимо свойства стационарности, метрика (4.2.1) обладает еще свойством аксиальной симметрии (не зависит от угла φ). Поэтому имеется еще векторное поле Киллинга, связанное с неизменностью пространства при повороте вокруг оси симметрии. Линейная комбинация двух векторов Киллинга всегда есть снова вектор Киллинга (т.е. в данном случае можно комбинировать перенос сечения во времени с поворотом вокруг пространственной оси). Мы выделяем такой вектор Киллинга, который соответствует отсутствию какого-либо поворота пространственной сетки вокруг оси симметрии на больших расстояниях от черной дыры ($r \rightarrow \infty$).

кую сетку *нельзя осуществить материальными телами* ("сварить" из прутьев). Такая сетка вблизи черной дыры двигалась бы по отношению к любому наблюдателю (с времениподобной мировой линией) со скоростью больше световой.

Несмотря на указанные особенности, мы по-прежнему можем представлять наши пространственные сечения $t = \text{const}$ как "абсолютное" жесткое пространство (напоминающее ньютоновское), а переменную t — как единое во всем "пространстве" "время" (при этом, естественно, необходимо помнить все сделанные выше оговорки).

В ОТО в произвольном гравитационном поле подобное разбиение пространства-времени на семейство 3-мерных пространственных сечений (вообще говоря, с меняющейся от сечения к сечению геометрией) и единое "время", нумерующее эти сечения, называют "3 + 1"-расщеплением пространства-времени^{*}), или кинеметрическим методом [Владимиров (1982*)]. Этот метод особенно удобен, когда все пространственные сечения идентичны, и можно рассматривать движения частиц, электромагнитные процессы и др., происходящие на этой неизменной "сцене" в едином "времени" t . Как уже отмечалось, в этом случае наши "наглядные" представления о пространстве и времени из повседневного опыта помогают нашей интуиции.

Мы будем использовать кинеметрический метод при изучении процессов вокруг стационарных черных дыр. В качестве пространственных сечений выбираются сечения $t = \text{const}$ в системе (4.2.1); t — временная координата.

§ 4.3. Хронометрическая система отсчета и система отсчета локально невращающихся наблюдателей

Рассмотрим прежде всего геометрические свойства нашего "абсолютного" пространства. Они описываются трехмерной метрикой, получающейся из (4.2.1), если положить $dt = 0$. В этом трехмерном "абсолютном" пространстве в фиксированный момент единого "времени" $t = \text{const}$ можно рассматривать распределение трехмерных векторных полей, вычислять, например, трехмерную дивергенцию векторного поля A и т.д. Изменение вектора A со "временем" t в фиксированной точке "абсолютного" пространства дается производной $\partial A / \partial t$.

Рассмотрим теперь систему отсчета наблюдателей, которые покоятся в "абсолютном" пространстве $t = \text{const}$, т.е. неподвижно "сидят" на нашей жесткой, недеформирующейся решетке. Эту систему называют хронометрической [Владимиров (1982*)], лагранжевой [Торн, Макдональд (1982) и Макдональд, Торн (1982)] или киллинговой. Посмотрим, какие силы, вызванные наличием вращающейся черной дыры, действуют в этой системе.

Трехмерные компоненты вектора ускорения $\tilde{F}_i$ в координатах r, θ, φ [ускорение "свободного падения"; см. (П.61)] определяются выражения-

^{*}) Существует другой способ "3 + 1"-расщепления, когда первоначально выбирают не 3-мерные сечения, а конгруэнцию времениподобных линий. Такой метод получил название хронометрического [Зельманов (1956*)].

ми [Владимиров (1982*)]

$$\tilde{F}_r = \frac{M(\rho^2 - 2r^2)}{\rho^2(\rho^2 - 2Mr)}, \quad \tilde{F}_\theta = \frac{Mra^2 \sin 2\theta}{\rho^2(\rho^2 - 2Mr)}, \quad \tilde{F}_\varphi = 0. \quad (4.3.1)$$

Все величины в данной хронометрической системе отсчета мы будем обозначать с тильдой, чтобы не путать с величинами, используемыми в дальнейшем.

Физические компоненты ускорения суть *)

$$\tilde{F}_r^\wedge = \frac{M(\rho^2 - 2r^2)\sqrt{\Delta}}{\rho^3(\rho^2 - 2Mr)}, \quad \tilde{F}_\theta^\wedge = \frac{Mra^2 \sin 2\theta}{\rho^3(\rho^2 - 2Mr)}, \quad \tilde{F}_\varphi^\wedge = 0. \quad (4.3.2)$$

Система отсчета наших наблюдателей жесткая, в ней тензор скоростей деформации [см (П.60)] равен нулю:

$$\tilde{D}_{ik} = 0. \quad (4.3.3)$$

Тензор угловой скорости вращения (П.59) есть

$$\tilde{A}_{r\varphi} = -\frac{Ma(\rho^2 - 2r^2) \sin^2 \theta}{\rho(\rho^2 - 2Mr)^{3/2}}, \quad \tilde{A}_{\theta\varphi} = -\frac{Mra \sin 2\theta}{\rho(\rho^2 - 2Mr)^{3/2}}, \quad \tilde{A}_{r\theta} = 0. \quad (4.3.4)$$

Отличие тензора $\tilde{A}_{ik}$ от нуля означает, что гироскопы, покоящиеся в нашей системе отсчета, прецессируют относительно нее, а значит, и относительно далеких объектов, так как наша жесткая система вдали переходит в лоренцеву. Тензор $\tilde{A}_{ik}$ пропорционален удельному угловому моменту черной дыры и отражает наличие "вихревого" гравитационного поля, вызванного ее вращением.

Подчеркнем следующее важное отличие внешнего поля черной дыры с вращением от случая без вращения.

Если черная дыра не вращается, условие $t = \text{const}$ означает физическую одновременность во всем внешнем пространстве для наблюдателей, в нем покоящихся (относительно жесткой системы отсчета). В случае вращающейся черной дыры наличие компоненты g_{0i} в жесткой системе отсчета не позволяет, как известно [см. Ландау, Лифшиц (1973*)], ввести в ней понятие одновременности. Обычно о событиях, для которых t одинаково, говорят как об одновременных по времени далекого наблюдателя. Но это вовсе не означает физической одновременности, определяемой синхронизацией часов путем посылки и приема световых сигналов.

Примечательно, что компоненты $\tilde{F}_r$, $\tilde{F}_\theta$, и компоненты $\tilde{A}_{ik}$, и вычисленная с их помощью угловая скорость прецессии гироскопа $\tilde{\Omega}_{\text{пр}}$ [см. (П.62)] обращаются в бесконечность, а компонента g_{00} в (4.2.1) (определяющая темп течения времени) обращается в нуль при

$$\rho^2 - 2Mr = r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr = 0 \quad (4.3.5)$$

*) $\tilde{F}_i^\wedge$ — компоненты вектора ускорения, непосредственно измеряемые наблюдателем, покоящимся в данной системе отсчета. В формуле (4.3.2) они даны в локальной декартовой системе координат с осями вдоль направлений r , θ , φ .

или при $r = r_1$, где r_1 определяется соотношением

$$r_1 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.3.6)$$

Указанные свойства означают, что в этом месте в системе отсчета имеется физическая особенность, и продолжить систему отсчета ближе к черной дыре нельзя, т.е. невозможно, чтобы наблюдатели покоились относительно нашей сетки*). Причина этого формально та же, что и в поле Шварцшильда на $r = r_g$: мировая линия наблюдателя $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ перестает быть времениподобной, что видно из смены знака g_{00} при $r < r_1$. Однако имеется существенная разница по сравнению с полем Шварцшильда.

В невращающейся черной дыре при $r < r_g$, чтобы получить мировую линию, лежащую внутри светового конуса, достаточно было сделать преобразование

$$dr = d\tilde{r} + A_1 dt. \quad (4.3.7)$$

Тогда при подходящем выборе $A_1 = A_1(r)$ линия $\tilde{r} = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ будет времениподобна. Это означает, что при $r < r_g$ тела обязаны двигаться по радиусу к центру, а r_g — граница изолированной черной дыры.

В случае вращающейся черной дыры при $r < r_1$ [мы считаем $\Delta > 0$; см. (4.2.1)] преобразование вида (4.3.7) не позволяет получить времениподобную мировую линию. Однако преобразование вида

$$d\varphi = d\tilde{\varphi} - \Omega_1 dt \quad (4.3.8)$$

позволяет это сделать (Ω_1 зависит от r и θ). Этот факт означает, что при $r < r_1$ и $\Delta > 0$ все тела обязаны участвовать во вращении вокруг черной дыры (в сторону, определяемую знаком a ; см. далее) относительно жесткой координатной сетки, простирающейся до бесконечности. Что же касается движения по радиусу r , то в области $r < r_1$, $\Delta > 0$ тела могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r .

Таким образом, предел статичности r_1 в случае вращающейся дыры имеет совсем другую природу, чем в поле Шварцшильда. Здесь тела неизбежно вовлекаются во вращение, но r_1 — не горизонт событий, так как из этой области можно выйти наружу. Горизонт событий в метрике (4.2.1) находится при $\Delta = 0$, т.е. при $r = r_+$, где

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (4.3.9)$$

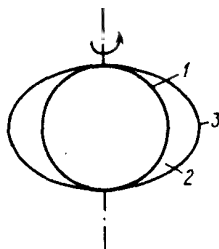
Область $r_+ < r < r_1$ называют эргосферой.

Таким образом, жесткая статическая (неподвижная по отношению к далекому наблюдателю) система отсчета из материальных тел не простирается до r_+ . Предел статичности расположен вне горизонта и совпадает с ним на полюсе (рис. 30). Важной особенностью статической системы отсчета является, как сказано выше, прецессия в ней гироскопов. Наша система в каждой своей точке вращается относительно местной лоренцевой системы. Разумеется, это отражает тот факт, что вращение черной дыры меняет состояние движения локальных лоренцевых систем, увлекая их во вращение вокруг черной дыры. Качественно это явление давно известно в теории уже в случае слабого поля тяготеющего вращающегося тела [Тирринг, Лензе (1918)].

*) Саму координатную сетку, конечно, можно продолжить ближе к черной дыре, но она уже неосуществима материальными телами.

Введем теперь во внешнем поле вращающейся черной дыры систему отсчета, которая в указанном смысле не вращается относительно местной лоренцевой системы. Эта система получила название системы отсчета локально невращающихся наблюдателей. Конечно, такая система не может быть уже жесткой. С этой целью проведем конгруэнцию мировых линий, всюду ортогональных выбранным нами пространственным сечениям $t = \text{const}$. Эти времениподобные линии по определению лишены кручения и образуют искомую систему отсчета. Наблюдатели, покоящиеся в ней, называются

Рис. 30. Вращающаяся черная дыра:
1 – горизонт, 2 – эргосфера, 3 – предел статичности



локально невращающимися наблюдателями [иногда эту систему отсчета также называют эйлеровой; см. Торн, Макдональд (1982)]. Такие наблюдатели движутся относительно сетки системы Бойера – Линдквиста, т.е. движутся в "абсолютном" пространстве*). Это движение происходит при постоянных $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ с постоянной (по времени) угловой скоростью по φ . Если определять угловую скорость ω по универсальному времени t (время далекого покоящегося наблюдателя), то

$$\omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}, \quad (4.3.10)$$

где $g_{\varphi t}$ и $g_{\varphi\varphi}$ берутся из (4.2.1).

Если же измерять угловую скорость по часам самого движущегося наблюдателя, то

$$\Omega_\tau = \frac{\omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2\omega g_{t\varphi} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}}}. \quad (4.3.11)$$

Линейная физическая скорость движения локально невращающихся наблюдателей относительно жесткой системы есть

$$v_\varphi = \frac{2Mra \sin \theta}{\rho^2 \sqrt{\Delta}}. \quad (4.3.12)$$

*) Несколько замечаний о терминологии. Она не единообразна не только у разных авторов, но иногда у одного и того же. Так, в работе Макдональда и Торна (1982) "абсолютным жестким" пространством названо то пространство, которое мы описали в § 4.2, и сказано, что локально невращающиеся наблюдатели движутся в этом пространстве [см. раздел 2 их работы перед формулой (2.6)]. В работе же Торна (1985) абсолютным называется пространство, сопутствующее локально невращающимся наблюдателям, и говорится, что они неподвижны в "абсолютном" пространстве [см. Торн (1985), с. 11]. Мы везде придерживаемся первой точки зрения.

По-разному, как мы видели, называют хронометрическую систему отсчета (см. с. 54). Весь этот "разнобой" носит исторический характер, однако авторы надеются, что в ближайшее время установится некое единообразие.

Как и следовало ожидать, эта скорость обращается в скорость света на пределе статичности $r = r_1$ и превосходит ее в эргосфере.

Подчеркнем еще раз, что собственное время локально невращающихся наблюдателей τ отличается от универсального "времени" t . Связь между ними дается функцией "длительности" α :

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{\text{н.н.}} \equiv \alpha = \left(\frac{\rho^2 \Delta}{A}\right)^{1/2}. \quad (4.3.13)$$

Приведем выражения для вектора ускорения свободного падения в системе локально невращающихся наблюдателей:

$$F_r = \frac{M}{\rho^2 \Delta \Delta_1} [(r^2 + a^2)^2 (a^2 \cos^2 \theta - r^2) + 4Mr^3 a^2 \sin^2 \theta],$$

$$F_\theta = a^2 \sin 2\theta \frac{Mr(r^2 + a^2)}{\rho^2 \Delta}, \quad (4.3.14)$$

$$F_\varphi = 0,$$

где $\Delta_1 = \rho^2 (r^2 + a^2) + 2Mra^2 \sin^2 \theta$.

Вектор F связан с α соотношением

$$F = -\nabla \ln \alpha. \quad (4.3.15)$$

Тензор скоростей деформации системы записывается в виде

$$D_{rr} = D_{r\theta} = D_{\theta\theta} = D_{\varphi\varphi} = 0,$$

$$D_{r\varphi} = -Ma [2r^2 (r^2 + a^2) + \rho^2 (r^2 - a^2)] \sin^2 \theta (\rho^3 \sqrt{\Delta \Delta_1})^{-1}, \quad (4.3.16)$$

$$D_{\theta\varphi} = 2Mra^3 \sin^3 \theta \cos \theta \sqrt{\Delta} (\rho^3 \sqrt{\Delta_1})^{-1},$$

а тензор $A_{ik} = 0$.

Рассматриваемая система отсчета не имеет никаких особенностей на пределе статичности и продолжается в эргосфере вплоть до границы черной дыры $r = r_+$. При $r \leq r_+$, помимо вращения вокруг черной дыры, необходимо происходит еще и падение по r . Система локально невращающихся наблюдателей при $r = r_+$ имеет физическую особенность: $F_r \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow r_+$ [см. формулу (4.3.14)].

При приближении к горизонту событий угловая скорость обращения локально невращающихся наблюдателей стремится к пределу:

$$\omega_+ = c^3 a / 2GM r_+. \quad (4.3.17)$$

Этот предел постоянен на горизонте и не зависит от θ . Его называют угловой скоростью вращения черной дыры (или горизонта) Ω^H .

На пространственной бесконечности система отсчета локально невращающихся наблюдателей переходит в ту же самую лоренцеву систему отсчета, что и система Бойера – Линдквиста (хронометрическая система).

В заключение параграфа остановимся на вопросе о "вращении" локально невращающихся наблюдателей и о прецессии гироскопов в системе отсчета, связанной с этими наблюдателями.

С одной стороны, система отсчета таких наблюдателей выбрана невращающейся, т.е. так, что $A_{ik} = 0$. Это значит, что отсутствует поворот системы относительно локально лоренцевой системы отсчета, а значит, и пре-

цессия гироскопа в системе отсчета локально невращающихся наблюдателей. С другой стороны, например, в книге Мизнера, Торна, Уилера (1973) говорится, что гироскопы прецессируют по отношению к локально невращающимся наблюдателям с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}}} \left[\frac{\omega_{,\theta}}{\rho} e_{\hat{r}} - \frac{\Delta^{1/2} \omega_{,r}}{\rho} e_{\hat{\theta}} \right], \quad (4.3.18)$$

где $e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}$ — единичные векторы вдоль r и θ соответственно, а величины $g_{\alpha\beta}$ берутся из выражения (4.2.1). Как совместить оба эти утверждения?

Парадокс разрешается следующим образом. Напомним, что движение малого элемента произвольной системы отсчета относительно локально

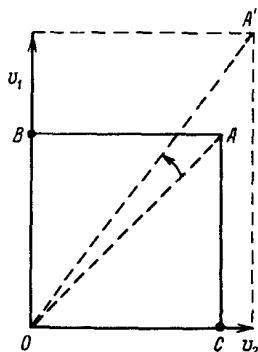


Рис. 31. Поворот диагонали OA при анизотропной деформации элемента объема вдоль направлений OB и OC

сопутствующей лоренцевой системы состоит в повороте вокруг мгновенной оси вращения и деформации вдоль главных направлений тензора скоростей деформации. Если поворота нет ($A_{ik} = 0$), то дело сводится только к деформации. Гироскоп, центр масс которого неподвижен в системе отсчета, при этом не прецессирует относительно главных направлений тензора скоростей деформации. Если вдоль этих направлений провести линии, сопутствующие системе отсчета ("приклеенные" к ней), то гироскоп не изменит своей ориентации по отношению к ним. Однако это вовсе не значит, что при этом гироскоп не меняет ориентацию по отношению к любой линии, проведенной в данном элементе объема и сопутствующей системе отсчета. В самом деле, из рис. 31 видно, что при анизотропной деформации линии, наклоненные, например, под углом 45° к главным направлениям тензора деформации и "приклеенные" к системе отсчета, поворачиваются, приближаясь к направлению наибольшего расширения. По отношению к этим линиям гироскоп прецессирует, хотя $A_{ik} = 0$. Именно эта ситуация и имеет место в случае локально невращающихся наблюдателей в метрике Керра.

Рассмотрим локально невращающихся наблюдателей в экваториальной плоскости. Везде $A_{ik} = 0$, и, согласно формулам (4.3.16), отличной от нуля является лишь компонента $D_{r\varphi}$. Это значит, что мгновенные ориентации главных осей тензора деформации направлены под углом 45° к векторам $e_{\hat{r}}$ и $e_{\hat{\varphi}}$. Заметим, что координатные линии φ "приклеены" к системе отсчета. Гироскоп не поворачивается по отношению к главным осям, но,

согласно предыдущему замечанию, поворачивается по отношению к координатной линии φ , а значит, и к $e_{\hat{\varphi}}$ (и, следовательно, к перпендикулярному к нему вектору $e_{\hat{r}}$, который не "приклеен" к системе отсчета; см. далее).

Итак, если локально невращающийся наблюдатель все время будет ориентировать свой репер вдоль направлений $e_{\hat{r}}$, $e_{\hat{\varphi}}$ и $e_{\hat{\theta}}$, то гироскоп будет прецессировать по отношению к этому реперу согласно формуле (4.3.18), несмотря на то, что в системе наблюдателя $A_{ik} = 0$. Репер $e_{\hat{r}}$, $e_{\hat{\varphi}}$, $e_{\hat{\theta}}$ — естественный; прецессию гироскопа следует определять по отношению к нему, ибо он определяется симметрией пространства вокруг наблюдателя. Но можно ввести и другой репер, например репер, который также связан с локально невращающимся наблюдателем, но не поворачивается относительно мгновенно сопутствующей лоренцевой системы. В таком репере гироскопы, конечно, не прецессируют.

Заметим, наконец, что если в некоторый момент выбрать одну систему координатных линий, "приклеенных" к локально невращающимся наблюдателям и направленных строго по r , а другую систему — по φ , то с течением времени координатные линии по φ будут скользить вдоль самих себя в "абсолютном" пространстве, а линии, бывшие им перпендикулярными, будут "наматываться" на черную дыру, превращаясь в спирали, так как станут увлекаться более быстрым движением наблюдателей, ближе расположенных к черной дыре, т.е. эти линии будут поворачиваться по отношению к линиям φ .

§ 4.4. Пространство-время вращающейся черной дыры

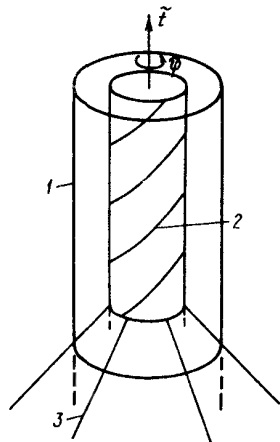
Рассмотрим общие свойства пространства-времени вращающейся черной дыры, описываемого решением (4.2.1).

Введем систему координат, которая не обладает координатными особенностями нигде в пространстве-времени, кроме истинной сингулярности, аналогично тому, как мы это делали в пространстве-времени Шварцшильда*). В шварцшильдовском пространстве-времени в качестве координатных линий можно было использовать мировые линии фотонов, движущихся по радиусу к центру [см. (2.4.12)]. В случае вращающейся черной дыры также можно использовать мировые линии фотонов, движущихся к черной дыре. Однако теперь вблизи черной дыры траектории фотонов будут закручиваться вокруг нее, увлекаемые ее "вихревым" гравитационным полем. Следовательно, при наличии вращения черной дыры, помимо замены координаты [подобно (2.4.11)], надо еще ввести "кручение" по координате φ .

Оказывается, что наиболее простое выражение для метрики получается, если использовать мировые линии фотонов, которые на бесконечности движутся с постоянным θ и имеют проекцию момента импульса на ось вращения черной дыры $L_z = aE \sin^2 \theta$ (см. следующий параграф), где E — энергия частицы на бесконечности. Можно показать, что переход к такой

*) Разумеется, мы не принимаем в расчет тривиальную координатную сингулярность на полюсе сферической системы координат, к которой все давно привыкли и смысл которой очевиден.

Рис. 32. Пространство-время вращающейся черной дыры: 1 — нулевая мировая линия вдоль предела статичности, 2 — "выходящие" фотоны, образующие горизонт, 3 — падающие внутрь фотоны



системе "свободно падающих" фотонов достигается заменой координат:

$$d\tilde{V} = dt + (r^2 + a^2) \frac{dr}{\Delta}, \quad (4.4.1)$$

$$d\tilde{\varphi} = d\varphi + a \frac{dr}{\Delta}.$$

Получающаяся система координат носит название координат Керра (1963):

$$\begin{aligned} ds^2 = & - [1 - \rho^{-2}(2Mr)] d\tilde{V}^2 + 2dr d\tilde{V} + \rho^2 d\theta^2 + \\ & + \rho^{-2} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \sin^2 \theta d\tilde{\varphi}^2 - \\ & - 2a \sin^2 \theta d\tilde{\varphi} dr - 4a\rho^{-2} Mr \sin^2 \theta d\tilde{\varphi} d\tilde{V}. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Лучше всего общие свойства геометрии вращающейся черной дыры видны на пространственно-временной диаграмме в координатах Керра (рис. 32). Здесь вместо координаты $\tilde{V}$ используется временная координата $\tilde{t}$:

$$\tilde{t} = \tilde{V} - r. \quad (4.4.3)$$

Подобные диаграммы в координатах Эддингтона мы уже использовали в гл. 2. Существенное отличие рассматриваемого сейчас случая состоит в том, что метрика Керра не обладает сферической пространственной симметрией, а только осевой.

Поскольку на этих диаграммах одна из вращательных степеней свободы не изображается (поворот вдоль "меридианов" θ), то они дают информацию только для какого-нибудь сечения (например, для экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$, как это сделано на рис. 32). На рисунке изображены некоторые мировые линии фотонов, которые существенны для описания свойств геометрии Керра. Прежде всего надо помнить, что рассматриваемые координаты с приближением к горизонту закручиваются все сильнее и сильнее вокруг черной дыры. Мировые линии фотонов, падающих внутрь черной дыры, изображаются прямыми. В координатах Бойера — Линдквиста (жесткая сетка — см. §§ 4.2, 4.3) они выглядели бы закрученными. Здесь же координатные линии закручиваются точно так же, как и траектории фотонов, поэтому эти траектории по отношению к координатным линиям

выглядят прямыми (собственно, мы так и выбирали координатные линии, чтобы они совпадали с траекториями падающих фотонов). На пределе статичности r_1 [см. (4.3.6), (4.3.7)] мировая линия $r, \theta, \tilde{\varphi} = \text{const}$ является нулевой, световой конус здесь касается этой линии. Ближе предела все фотоны и частицы обязаны участвовать во вращательном движении вокруг черной дыры, двигаясь с $d\tilde{\varphi}/dt > 0$. Но они могут вылететь из-под предела статичности к $r > r_1$.

На горизонте все времениподобные и нулевые мировые линии направлены внутрь черной дыры, за исключением единственной в каждой точке горизонта нулевой линии "выходящего" фотона, которая касается горизонта. Это семейство мировых линий "навивается" на горизонт (см. рис. 32), все время оставаясь на нем. Уравнение этих нулевых геодезических в координатах Керра имеет вид

$$r = r_+, \quad \theta = \text{const}, \quad \varphi = \frac{a \tilde{V}}{r_+^2 + a^2}. \quad (4.4.4)$$

Все другие фотоны и частицы, достигнув горизонта, обязаны продолжать падать внутрь черной дыры.

Поскольку метрика Керра инвариантна относительно преобразования $t \rightarrow -t, \varphi \rightarrow -\varphi$, переводящего входящие световые лучи в выходящие, можно выполнить это преобразование в (4.4.1). Если при этом произвести замену $\tilde{V} \rightarrow -\tilde{U}, \tilde{\varphi} \rightarrow -\tilde{\varphi}_+$, то уравнения $\tilde{U} = \text{const}, \tilde{\varphi}_+ = \text{const}$ описывают семейство выходящих световых лучей, а координата $\tilde{U}$ на бесконечности совпадает с обычной координатой запаздывающего времени. Метрика Керра в этих координатах получается из (4.4.2) преобразованием $\tilde{V} = -\tilde{U}, \tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}_+$.

В отличие от метрики Шварцшильда, мы не будем рассматривать здесь продолжение метрики Керра внутри горизонта*). Причина этого состоит в следующем. В случае коллапса сферического тела, порождающего шварцшильдовскую черную дыру, метрика пространства-времени вне коллапсирующего тела является точно метрикой Шварцшильда как вне, так и внутри черной дыры. При коллапсе невращающегося тела с малыми отклонениями от сферичности метрика вне черной дыры быстро стремится к шварцшильдовской при $t \rightarrow \infty$. В гл. 12 мы увидим, что то же свойство имеет место и внутри шварцшильдовской черной дыры. Таким образом, внутренняя область шварцшильдовской метрики описывает реальную "внутренность" невращающейся черной дыры.

Ничего подобного нельзя сказать о метрике Керра. Во-первых, при сжатии любого вращающегося тела, превращающегося в черную дыру, вне тела метрика не может быть сразу стационарной (а значит, не может быть метрикой Керра), так как в процессе коллапса происходит излучение гравитационных волн. Это справедливо как для области вне горизонта, так и внутри горизонта. В области вне горизонта, как мы увидим в гл. 6, все отклонения от метрики Керра уносятся гравитационными волнами и предельная метрика при $t \rightarrow \infty$ есть решение Керра. Таким образом, для внешнего пространства-времени метрика Керра описывает реальную вращающуюся черную дыру.

*) Структура максимального аналитического продолжения метрики Керра — Ньюмена рассматривается в § 6.5.

Однако для области внутри горизонта — ни сразу после коллапса, ни с течением времени — метрика не стремится к решению Керра. Поэтому оно (внутри горизонта) не описывает внутренность реальной вращающейся черной дыры (подробно о строении черных дыр внутри горизонта будет говориться в гл. 12). Подчеркнем, что все рассмотренные выше свойства пространства-времени черной дыры справедливы только, если $M \geq |a|$. В противном случае в решении исчезает горизонт, и оно уже не описывает черную дыру. Появляются "патологические" особенности [Хокинг, Эллис (1973)], и вряд ли это решение может иметь какое-либо отношение к реальности. С физической точки зрения для образования объекта с $M < |a|$ требовалось бы сжатие вращающегося тела, обладающего столь большим угловым моментом, что при размерах $r \approx r_+$ линейная скорость вращения должна была бы превышать скорость света. Везде в дальнейшем (для незаряженной черной дыры) мы считаем $M \geq |a|$.

§ 4.5. Небесная механика вращающейся черной дыры

Рассмотрим движение по геодезическим пробных частиц в поле тяготения вращающейся черной дыры. В общем случае траектории довольно сложны, так как поле не обладает сферической симметрией. Подобное изложение вопроса см. Бардин и др. (1972), Стюарт и Уолкер (1973), Руффини, Уилер (1971), Мизнер, Торн, Уилер (1973), Шапиро, Тюкольский (1983), Дымникова (1986*). Важные аспекты гравитационного захвата частиц вращающейся черной дырой рассмотрены в работах Дымниковой (1982), Бичака, Стачлика (1976). В приведенных работах можно найти ссылки на многочисленные оригинальные статьи.

Движение пробных частиц мы рассматриваем по отношению к "абсолютному" пространству, введенному нами в § 4.2, т.е. по отношению к жесткой решетке хронометрической системы отсчета, описываемой координатами Боейра — Линдквиста (см. § 4.3).

Первые интегралы движения записываются в виде

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \{ [E(r^2 + a^2) - L_z a]^2 - \Delta [m^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + Q^*] \}^{1/2}, \quad (4.5.1)$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \left\{ Q^* - \cos^2 \theta \left[a^2 (m^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.5.2)$$

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = - \left(aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - L_z a], \quad (4.5.3)$$

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = -a(aE \sin^2 \theta - L_z) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - L_z a]. \quad (4.5.4)$$

Здесь m — масса покоя пробной частицы, $\lambda = \tau/m$, где τ — собственное время частицы, E — постоянная энергия пробной частицы, L_z — постоянная проекция момента импульса частицы на ось вращения черной дыры, Q^* —

найденный Картером (1968а) интеграл движения*):

$$Q^* = p_\theta^2 + \cos^2 \theta [a^2 (m^2 - E^2) + \sin^2 \theta L_z^2], \quad (4.5.5)$$

где p_θ — θ -компонента 4-импульса пробной частицы. Движению ультрарелятивистской частицы соответствует предельный переход $m \rightarrow 0$.

Рассмотрим сначала характерные особенности движения частиц в экваториальной плоскости вращающейся черной дыры. Выражения для $dr/d\lambda$ и $d\varphi/d\lambda$ в этом случае могут быть записаны в виде [Шапино, Тюкольский (1983)]

$$r^3 \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 (r^3 + a^2 r + 2Ma^2) - 4aME L_z - (r - 2M)L_z^2 - m^2 r \Delta, \quad (4.5.6)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{(r - 2M)L_z + 2aME}{r\Delta}. \quad (4.5.7)$$

Эти выражения являются аналогом уравнений (2.8.1) — (2.8.2) для шварцшильдовской черной дыры. Анализ особенностей движения производится точно таким же способом, как в § 2.8. В частности, приравнивая правую часть уравнения (4.5.6) нулю и решая его относительно E , получаем "эффективный потенциал". Экстремумы эффективного потенциала соответствуют круговому движению. Выражения для $E_{\text{круг}}$ и $L_{\text{круг}}$ имеют в этом случае вид ($m = 1$)

$$E_{\text{круг}} = \frac{r^2 - 2Mr \pm a\sqrt{Mr}}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}, \quad (4.5.8)$$

$$L_{\text{круг}} = \pm \frac{\sqrt{Mr}(r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2)}{r(r^2 - 3Mr \pm 2a\sqrt{Mr})^{1/2}}. \quad (4.5.9)$$

Здесь и в приводимых ниже формулах верхние знаки соответствуют обращению частицы в ту же сторону, в которую вращается черная дыра, нижние — в противоположную, поэтому будем всюду считать $a \geq 0$.

Радиус ближайшей к черной дыре круговой орбиты, по которой движение происходит со скоростью света, есть

$$r_{\text{фотона}} = 2M \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\mp \frac{a}{M} \right) \right] \right\}. \quad (4.5.10)$$

Эта орбита неустойчива.

Неустойчивая круговая орбита, на которой $E_{\text{круг}} = m$, определяется выражением

$$r_{\text{связ}} = 2M \mp a + 2M^{1/2} (M \mp a)^{1/2}. \quad (4.5.11)$$

Эти значения радиуса являются минимумами периастров всех параболических орбит. Если орбита частицы, прилетающей в экваториальной плоскости из бесконечности, где ее скорость $v_\infty \ll c$, подходит к черной дыре ближе, чем $r_{\text{связ}}$, то частица захватывается черной дырой. Значение радиуса r_0 периастра параболической орбиты определяется параметром $\tilde{L}$

*) Этот интеграл движения связан с существованием в метрике Керра тензорного поля Киллинга (П.17) [Картер (1968а, 1973а, 1977), Уолкер, Пенроуз (1970)].

Таблица 2

Орбита	$a = 0$	$a = M$	
		$L > 0$	$L < 0$
$r_{\text{фотона}}$	1,5	0,5	2
$r_{\text{связ}}$	2	0,5	2,92
$r_{\text{гп}}$	3	0,5	4,5

Таблица 3

Орбита	$a = 0$	$a = M$	
		$L > 0$	$L < 0$
E/m	$\sqrt{8/9}$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{25/27}$
$(m - E)/m$	0.0572	0.423	0.0377
$ L /mM$	$2\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$22/3\sqrt{3}$

частицы:

$$r_0 = M[\tilde{L}^2 + \sqrt{\tilde{L}^4 - (2\tilde{L} - a/M)^2}], \quad (4.5.11a)$$

причем $|\tilde{L}| < 1 + \sqrt{1 \mp a/M}$.

Наконец, радиус граничной окружности, отделяющей устойчивые круговые орбиты от неустойчивых, дается выражением

$$r_{\text{гп}} = M\{3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2}\}, \quad (4.5.12)$$

где

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2/M^2)^{1/3}[(1 + a/M)^{1/3} + (1 - a/M)^{1/3}],$$

$$Z_2 = (3a^2/M^2 + Z_1^2)^{1/2}.$$

В табл. 2 приведены значения рассмотренных выше величин для предельно быстро вращающейся черной дыры $a = M$ в сравнении со случаем $a = 0$ (в единицах $r_g = 2GM/c^2$). Заметим, что при $a \rightarrow M$ инвариантное расстояние

от точки r до горизонта r_+ , равное $\int_{r_+}^r \frac{dr'}{\Delta(r')^{1/2}}$, расходится. Поэтому,

хотя при $L > 0$ радиусы r всех трех орбит стремятся к одному и тому же значению r_+ , это вовсе не означает, что все орбиты в этом пределе совпадают друг с другом и лежат на горизонте [см. Бардин и др. (1972)].

Наконец, приведем значения удельной энергии E/m , удельной энергии связи $(m - E)/m$ и удельного момента $|L|/mM$ пробной частицы на последней устойчивой орбите $r_{\text{гп}}$ (табл. 3).

Уравнение (4.5.6) показывает, что вблизи вращающейся черной дыры возможны движения частиц с отрицательным E . Решим его относительно E :

$$E = \frac{2aML + [L^2 r^2 \Delta + m^2 r \Delta + r^3 (dr/d\lambda)^2]^{1/2}}{r^3 + a^2 r + 2Ma^2}. \quad (4.5.13)$$

Знак корня выбран положительным, так как это соответствует направлению 4-импульса частицы в будущее [Мизнер, Торн, Уилер (1973)]. Числитель (4.5.13) отрицателен, если $L < 0$, и первое слагаемое превышает корень квадратный из скобки.

Второе и третье слагаемые в скобке можно сделать сколько угодно малым ($m \rightarrow 0$ соответствует переходу к ультрарелятивистской частице, $dr/d\lambda \rightarrow 0$ соответствует переходу к движению в азимутальном направлении). Тогда условия отрицательности E соответствует выбору точек внутри эргосферы $r < r_1$. Если $m \neq 0$ и $dr/d\lambda \neq 0$, это накладывает добавочные ограничения.

Выражение (4.5.13) справедливо только для $\theta = \pi/2$. Можно показать, что орбиты с отрицательным E возможны внутри эргосферы при любом $\theta \neq 0$. Наличие орбит с $E < 0$ делает возможным механические процессы, ведущие к извлечению "вращательной энергии" черной дыры. Такие процессы были открыты Пенроузом (1969). Подробно это явление и физические следствия из него будут обсуждаться в § 8.1.

Рассмотрим теперь некоторые движения пробных частиц не в экваториальной плоскости и прежде всего нерелятивистских частиц, движущихся с параболической скоростью ($v_\infty = 0$) и нулевым угловым моментом ($L = 0$). Такие частицы будут падать с постоянным θ и увлекаться во вращение вокруг черной дыры в широтном направлении с угловой скоростью (4.3.11), т.е. угловой скоростью движения локально "невращающихся наблюдателей".

Таким образом, в системе отсчета локально "невращающихся наблюдателей" эти частицы в каждой точке падают радиально.

Другой важный случай представляет падение ультрарелятивистских частиц (фотонов), которые на бесконечности движутся с $d\theta/d\lambda = 0$ и $L_z = aE \sin^2 \theta$. Для них уравнения (4.5.1)–(4.5.4) сводятся к следующим:

$$\frac{dr}{d\lambda} = E, \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{aE}{\Delta}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{(r^2 + a^2)E}{\Delta}. \quad (4.5.14)$$

Мировые линии этих фотонов используются при построении системы координат Керра (§ 4.4).

§ 4.6. Гравитационный захват частиц вращающейся черной дырой

По аналогии с § 2.9 рассмотрим гравитационный захват частиц вращающейся черной дырой [обзор см. Дымникова (1986*)].

Прицельный параметр $b_\perp$ захвата нерелятивистской частицы, движущейся в экваториальной плоскости, определяется выражением

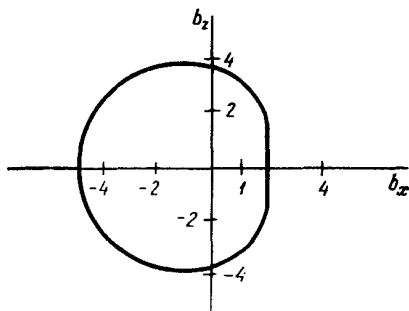
$$b_\perp = \pm 2M \frac{1}{v_\infty} \left(1 + \sqrt{1 \mp \frac{a}{M}} \right). \quad (4.6.1)$$

Форма сечения захвата для случая падения частиц перпендикулярно оси вращения черной дыры с $a = M$ показана на рис. 33 [Юнг (1976)]. Площадь сечения захвата для этого случая

$$\sigma_1 = 14,2\pi(1/v_\infty)^2 M^2. \quad (4.6.2)$$

Для частиц, падающих параллельно оси вращения, прицельный параметр $b_\parallel$ захвата может быть найден следующим образом. Введем обозначения

Рис. 33. Сечение захвата для частиц, движущихся перпендикулярно оси вращения черной дыры с $a = M$ и $v_\infty \rightarrow 0$. Масштаб по осям — в единицах $M(1/v_\infty)$



$\tilde{b}_\parallel = b_\parallel/M, \tilde{a} = a/M$. Тогда $\tilde{b}_\parallel$ находится как решение уравнения

$$(1 - \tilde{a})^2 q_0^4 + 4(5\tilde{a}^2 - 4)q_0^3 - 8\tilde{a}^2(6 + \tilde{a}^2)q_0^2 - 48\tilde{a}^4 q_0 - 16\tilde{a}^6 = 0, \quad (4.6.3)$$

где $q_0 = v_\infty^2 (\tilde{b}_\parallel^2 - \tilde{a}^2)$. Для $\tilde{a} = 1$

$$\tilde{b}_\parallel = 3.85 \left(\frac{1}{v_\infty} \right) M, \quad \sigma_\parallel = 14.8 \pi \left(\frac{1}{v_\infty} \right)^2 M^2. \quad (4.6.4)$$

Рассмотрим теперь ультрарелятивистские частицы. Прицельные параметры захвата $b_\perp$ для движения экваториальной плоскости даются следующими формулами:

$$\frac{b_\perp^+}{M} = 8 \cos^3 \left[\frac{1}{3} (\pi - \arccos \tilde{a}) \right] + \tilde{a} \quad (4.6.5)$$

для движения с положительным моментом и

$$\frac{b_\perp^-}{M} = -8 \cos^3 \left(\frac{1}{3} \arccos |\tilde{a}| \right) + \tilde{a} \quad (4.6.6)$$

для движения с отрицательным моментом.

Площадь сечения захвата для этого случая

$$\sigma_\perp = 24.3 \pi M^2. \quad (4.6.7)$$

Для фотонов, летящих параллельно оси вращения черной дыры с $\tilde{a} = 1$, соответственно

$$\frac{b_\parallel}{M} = 2(1 + \sqrt{2}), \quad \sigma_\parallel = 23.3 \pi M^2. \quad (4.6.8)$$

Сравнение сечений захвата, приведенных в этом параграфе, с данными § 2.9 показывает, что вращающаяся дыра захватывает падающие частицы менее эффективно, чем невращающаяся с той же массой.

§ 4.7. Волновые поля вокруг вращающейся черной дыры

Аналогично тому, как изучались слабые (не возмущающие фоновую метрику) волновые поля в метрике Шварцшильда, исследуется эта же задача и в метрике Керра. Главная сложность здесь связана с тем, что метрика обладает лишь осевой (а не сферической, как шварцшильдовская) симметрией. Картер, нашедший четвертый интеграл и разделивший

переменные в уравнениях геодезических в метрике Керра (см. § 4.5), показал, что уравнение для массивного (заряженного) поля со спином нуль в этой метрике также допускает разделение переменных [Картер (1968b)]. Тюкольскому (1972) удалось расцепить систему уравнений для компонент безмассового поля для спина 1 и 2 и свести эти уравнения к одному производящему волновому уравнению для комплексной скалярной функции. Аналогичный результат был получен Тюкольским (1973) для безмассового поля спина 1/2 [см. также Унру (1973)]. Это производящее уравнение в координатах Бойера — Линдквиста (4.2.1) — (4.2.2) имеет вид

$$\left[\left(\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} - \right. \\ \left. - \left(\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - 2s \left(\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \right. \\ \left. - 2s \left(\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial t} + s^2 \operatorname{ctg}^2 \theta - s \right] \Psi_{(s)} = 0.$$

Здесь s — спин поля. Свойство разделения переменных в этом уравнении означает, что решение $\Psi_{(s)}$ можно записать в виде

$$\Psi_{(s)} = e^{i\omega t + im\varphi} \Phi(r) S(\theta).$$

Сфероидальные волновые функции $S(\theta)$ были подробно изучены в работе Факерелла и Кросмана (1977). Как и в случае метрики Шварцшильда, решение $\Psi_{(s)}$ производящего уравнения позволяет определить все компоненты рассматриваемого безмассового поля.

Метод разделения переменных был использован для анализа устойчивости метрики Керра [Пресс, Тюкольский (1973), Стюарт (1975)] и для изучения рассеяния электромагнитного, гравитационного и нейтринного полей на керровской черной дыре [Старобинский, Чурилов (1973*), Тюкольский, Пресс (1974), Чандрасекар, Детвилер (1975b, 1976), Детвилер (1977), Чандрасекар (1979b)].

В уравнении Дирака с ненулевой массой не удавалось разделить переменные до тех пор, пока Чандрасекар (1976) не предложил новый метод, в котором разделение переменных производилось до расщепления системы уравнений. Пэйдж (1976с) и Туп (1976) распространили этот подход на случай дираковского уравнения для массивных заряженных частиц. Взаимодействующие электромагнитные и гравитационные возмущения в метрике Керра — Ньюмена рассматривались в работах Ли (1976), Читра (1976), Факерелла и Кросмана (1976). Полное изложение математической теории распространения физических полей в пространстве-времени вращающейся черной дыры читатель найдет в книге Чандрасекара (1983), где также имеются дальнейшие ссылки на оригинальные работы.

Здесь мы ограничимся только кратким описанием основных идей, методов и физическими выводами. Особое внимание будет уделено, как и в случае сферической черной дыры, распространению гравитационных волн, а также явлению суперрадиации, специфичному для вращающейся черной дыры.

Начнем с рассмотрения распространения гравитационных волн.

Чандрасекар, Детвилер (1975b, 1976) и Детвилер (1977) показали, что гравитационные возмущения вокруг вращающейся черной дыры с массой M и параметром a могут быть определены с помощью решения следующего скалярного уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi}{dr_*^2} - V(r, M, a, l, m, \omega) \Phi = 0. \quad (4.7.1)$$

Здесь r_* — обобщенная "черепашня" координата, введенная Уилером (1955):

$$dr_* = \Delta^{-1}(r^2 + a^2) dr. \quad (4.7.2)$$

Величина $r_* \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ и $r_* \rightarrow -\infty$ при $r = r_+$. Потенциальный барьер V , помимо r, M, a , зависит от величин l и m , соответствующих сфероидальным гармоническим индексам, и от частоты ω . Конкретная форма этой зависимости дана в цитированных выше работах. Зависимость от времени каждой гармоники дается функцией $\exp(i\omega t)$. Уравнение (4.7.1) справедливо вне источника возмущений. При наличии источника правая часть (4.7.1) отлична от нуля. Конкретные выражения для правой части (4.7.1) даны Детвилером (1977).

Зная решение уравнения (4.7.1), можно вычислить компоненты возмущения метрического тензора. Таким образом, как и в случае невращающейся черной дыры, все сводится к анализу решений скалярного уравнения (4.7.1). Подчеркнем, что в случае метрики Керра (в отличие от метрики Шварцшильда) потенциальный барьер V зависит от m и ω .

Асимптотика общего решения уравнения (4.7.1) может быть записана в следующем виде:

вдали от черной дыры ($r_* \rightarrow \infty$)

$$\Phi \sim A_{\text{out}} e^{-i\omega r_*} + A_{\text{in}} e^{i\omega r_*}; \quad (4.7.3)$$

вблизи горизонта ($r_* \rightarrow -\infty$)

$$\Phi \sim B_{\text{out}} e^{-ikr_*} + B_{\text{in}} e^{ikr_*} \quad (4.7.4)$$

(здесь $k = \omega + am/2Mr_+$).

Квадраты абсолютных величин A и B (сами эти величины, вообще говоря, комплексные) пропорциональны потокам энергии входящих и выходящих волн — соответственно на бесконечности и на горизонте.

Рассмотрим прежде всего квазинормальные моды колебаний вращающейся черной дыры [Детвилер (1980)].

Как и в случае невращающейся черной дыры, это такие моды колебаний, при которых нет волны, идущей от бесконечности ($r_* = \infty$), и нет волны, идущей от горизонта ($r_* = -\infty$), т.е.

$$A_{\text{in}} = B_{\text{out}} = 0. \quad (4.7.5)$$

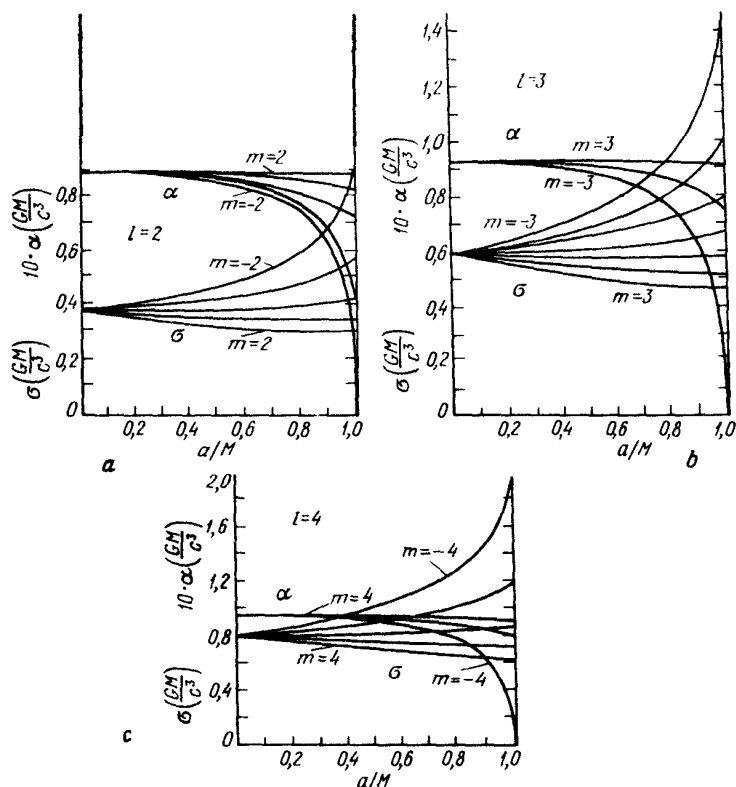


Рис. 34. Резонансные частоты $\omega = \sigma + i\alpha$ как функция параметра a для разных l и m

Условие (4.7.5) возможно только для определенных (резонансных) частот. Резонансные частоты квазинормальных мод были найдены Детвилером (1980). На рис. 34 показана зависимость резонансных частот от параметра a . Напомним, что зависимость от времени каждой гармоники определяется функцией $\exp(i\omega t)$. При $a \neq 0$ частоты зависят от m .

Обратимся теперь к излучению гравитационных волн при движении частицы в поле вращающейся черной дыры. Начнем с частицы, падающей вдоль оси симметрии z с нулевой скоростью на бесконечности ($v_\infty = 0$) [см. Сакаки, Накамура (1981), Накамура, Сакаки (1981), Накамура, Хоуган (1983)].

На рис. 35 показан спектр излучения частицы массы m , падающей в дыру с $a/M = 0,99$, для разных мод $l = 2, 3, 4$. Для сравнения пунктиром показан спектр излучения в случае радиального падения частицы в шварцшильдовскую черную дыру ($a = 0$).

Необходимо отметить два обстоятельства. Во-первых, основная излученная энергия приходится на "звонное" излучение нормальных мод. Во-вторых, из-за того, что большинство резонансных частот имеют большее значение при $a/M = 0,99$, чем при $a = 0$, максимумы излучения также сдвинуты в сторону больших частот.

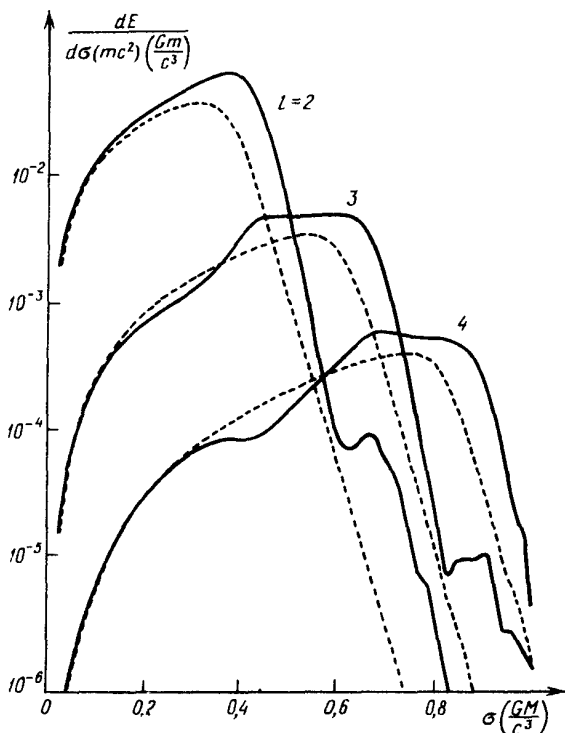


Рис. 35. Полный спектр гравитационного излучения на разных модах l частицы массы m с $v_\infty = 0$, падающей вдоль оси вращения в черную дыру с $a/M = 0,99$ (сплошные линии) и $a = 0$ (пунктир)

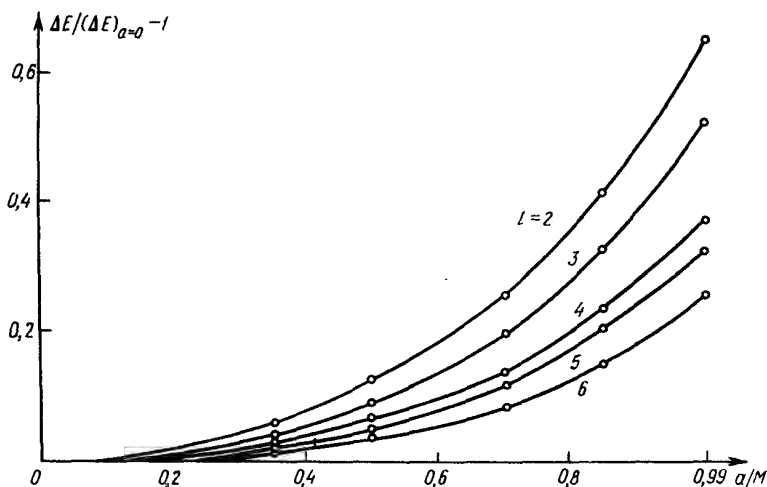


Рис. 36. Отношение полной излученной энергии на разных модах l частицы с $v_\infty = 0$, падающей вдоль оси вращения черной дыры с данным параметром a , к энергии, излученной при падении в невращающуюся черную дыру

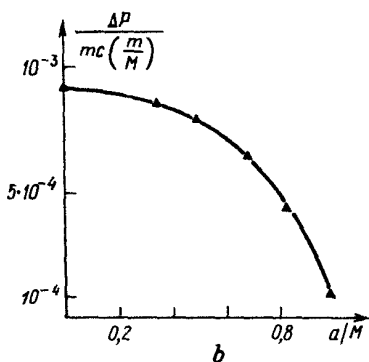
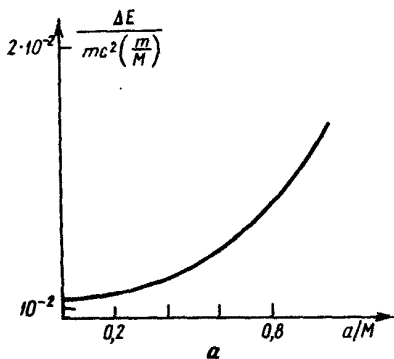


Рис. 37. Зависимость полной энергии (а) и импульса (b), излученных частицей с массой m и $v_\infty = 0$, падающей вдоль оси вращения, от параметра a

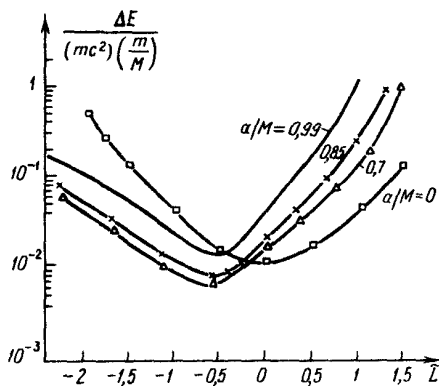


Рис. 38. Полная излученная энергия при падении частиц с $v_\infty = 0$ в экваториальной плоскости черной дыры с разными a как функция углового момента частицы $\tilde{L}$

На рис. 36 приведена зависимость энергии, излучаемой на данной моде l , от параметра a черной дыры. Наконец, на рис. 37 показаны полная излученная энергия ΔE (а) и импульс ΔP (b) в зависимости от a . Напомним: излучение ΔP возникает из-за того, что падающая частица, подлетая к черной дыре, излучает гравитационные волны главным образом в направлении своего движения.

Перейдем теперь к случаю движения частицы в экваториальной плоскости вращающейся черной дыры [Кожима, Накамура (1983, 1984а, б)]. Рис. 38 показывает полное количество излученной энергии для частиц, имеющих не слишком большой угловой момент и в конце концов захватываемых черной дырой (с разными значениями a)*. При $a/M \neq 0$ видна асимметрия графиков для положительных и отрицательных $\tilde{L}$. Прежде все-

*) Подчеркнем, что расчеты проводятся без учета обратного влияния излучения на движение частицы, поэтому они перестают быть справедливыми при $\tilde{L}$, близких к критическим значениям, определяющим захват частицы. При этих значениях $\tilde{L}$ частица делает много оборотов вокруг черной дыры вблизи критической орбиты (см. §§ 4.5, 4.6), и необходим учет накапливающегося обратного влияния излучения на движение. Случай $|\tilde{L}| > \tilde{L}_{\text{кр}}$ рассмотрен далее.

го, минимумы графиков для $a/M \gtrsim 0,7$ лежат при $\tilde{L} \approx -1$ (а не $\tilde{L} = 0$, как в случае $a = 0$). Это связано с тем, что частицы с отрицательным $\tilde{L}$ вблизи черной дыры уменьшают тангенциальную составляющую своей скорости чтобы орбитальное движение стало направленным в сторону вращения чер

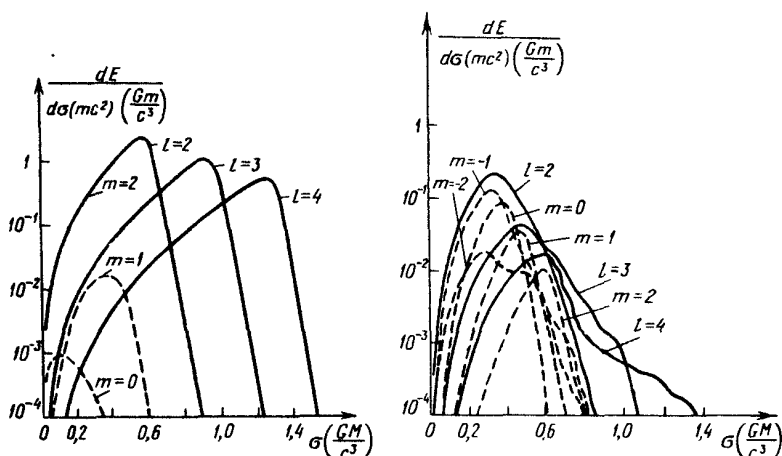


Рис. 39. Полный спектр излучения на разных модах для частицы с $\tilde{L} = 1,3$, падающей в экваториальной плоскости черной дыры с $a/M = 0,85$

Рис. 40. То же, что и на рис. 39, но при $\tilde{L} = -2,25$

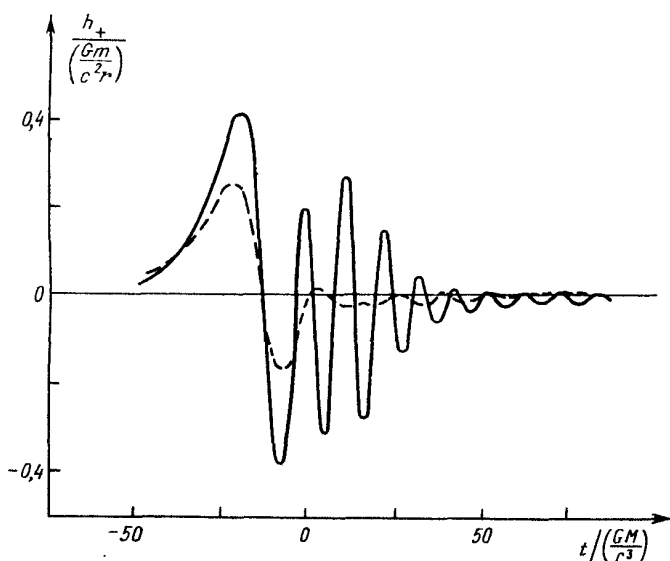


Рис. 41. Форма гравитационной волны h_+ для $l = 2$ в экваториальной плоскости и с $\varphi = 0$ для тех же условий, что и на рис. 39 (сплошная линия) и рис. 40 (пунктир)

ной дыры. В результате частицы с малым по модулю отрицательным $\tilde{L}$ имеют меньшую скорость, чем, например, с $\tilde{L} = 0$, и общее количество излученной энергии у них меньше. Для частиц с большим по модулю отрицательным $\tilde{L}$ излучение в основном определяется величиной углового момента, и ΔE возрастает с ростом $|\tilde{L}|$.

Основная асимметрия графика зависимости ΔE от $\tilde{L}$, проявляющаяся в том, что при одинаковом модуле $\tilde{L}$ при $\tilde{L} > 0$ излучается больше энергии, чем при $\tilde{L} < 0$, связана со следующим обстоятельством (согласно интерпретации Кожимы и Накамуры). При захвате частицы черной дырой (как в рассматриваемом случае) возбуждаются собственные колебания черной дыры. В случае движения частицы в сторону вращения последней сильнее всего возбуждаются колебания мод с $m = -l$ (для фиксированного l) *). Но, согласно рис. 34, минимальная часть ω наименьшая именно для $m = -l$. Значит, и затухание этой моды будет минимальным, и она в результате даст основной вклад в излучение (это явно видно из рис. 39, где для $l = 2$ показаны вклады от разных m).

Таким образом, сильнее всего возбуждается мода с наименьшим затуханием.

В случае частицы с отрицательным $\tilde{L}$ сильнее всего возбуждаются моды с $m = l$ (для фиксированного l). Но они, согласно рис. 34, и быстрее всего затухают! В результате вклад от разных m оказывается сравнимым (рис. 40), а общее количество высвеченной энергии заметно меньше, чем в предыдущем случае. Разница в излучении черной дыры при захвате частицы, движущейся в сторону ее вращения, и частицы, движущейся против вращения, хорошо видна также на рис. 41, где изображено изменение со временем возмущения гравитационного поля в волне. В первом случае имеется более длительное "звоновое" излучение и длина волны короче, чем во втором случае (модули $\tilde{L}$ примерно одинаковы).

Наконец, на рис. 42 показано излучение углового момента ΔL и импульса ΔP в зависимости от $\tilde{L}$ для черных дыр с разными a .

Перейдем теперь к рассмотрению излучения гравитационных волн частицей, движущейся в плоскости $\theta = \pi/2$, имеющей нулевую скорость на бесконечности и угловой момент $\tilde{L}$, достаточно большой для того, чтобы не быть захваченной черной дырой (случай рассеяния). Данная задача рассмотрена в работе Кожимы, Накамуры (1984b).

Напомним, что в случае невращающейся черной дыры при рассеянии нерелятивистской частицы собственные моды колебаний черной дыры не возбуждались (см. § 3.3). Периастр траектории таких частиц лежит вне потенциального барьера для гравитационных волн, а излучаемые движущейся частицей волны имеют слишком низкую частоту, чтобы проникнуть сквозь барьер и возбудить собственные колебания черной дыры. Однако в случае вращающейся черной дыры частота излучаемых частицей гравитационных волн в периастре, равная удвоенной угловой скорости движения

*) Выбор знака m соответствует рис. 34 и статье Девиллера (1980); в работах Кожимы и Накамуры выбор знака противоположный.

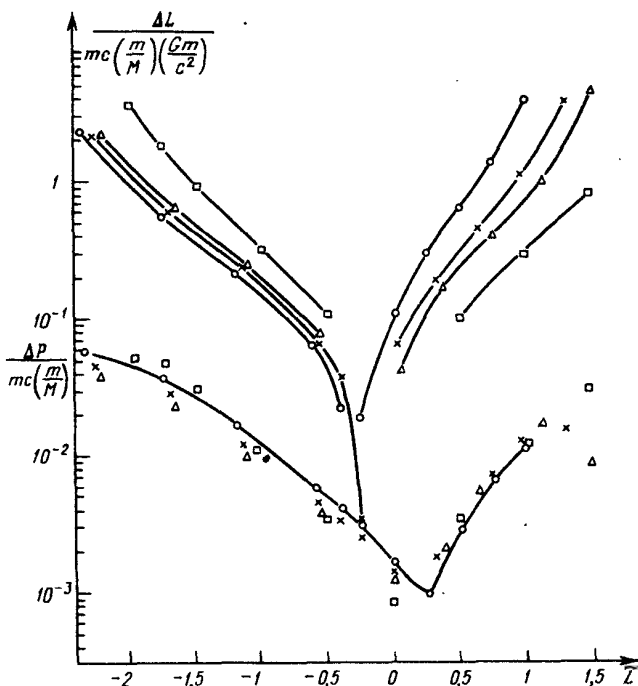


Рис. 42. Полные и излученные угловой момент и импульс для тех же условий, что и на рис. 38: кружочки — $a/M = 0,99$, крестики — $0,85$, треугольники — $0,7$, квадраты — 0

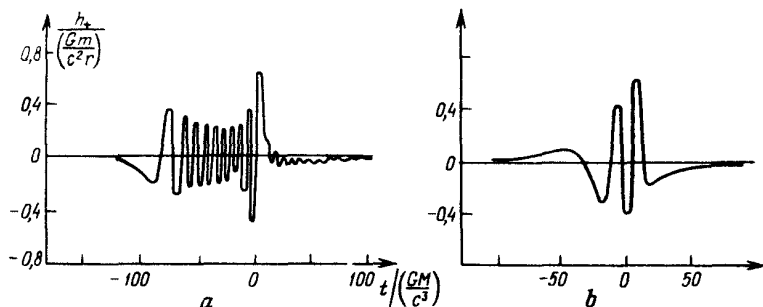


Рис. 43. Форма гравитационной волны h_+ для $l = 2$, $m = -2$ в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ и вдоль направления на периастр траектории частицы при рассеянии частицы $\varphi = 0$ с $v_\infty = 0$ в поле черной дыры с $a/M = 0,99$: а) $\tilde{L} = 2,21$; в) $\tilde{L} = 2,6$

частицы, может быть близкой к собственной частоте и достаточной для ее возбуждения. Это возможно при положительном $\tilde{L}$, лишь немногим превышающем критическое значение захвата.

Так, на рис. 43а и б показаны возмущения метрики в волне для случая движения вокруг черной дыры с $a/M = 0,99$ и $\tilde{L} = 2,21$ и $2,6$. Во втором

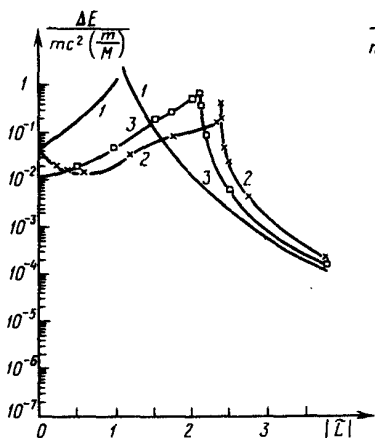


Рис. 44

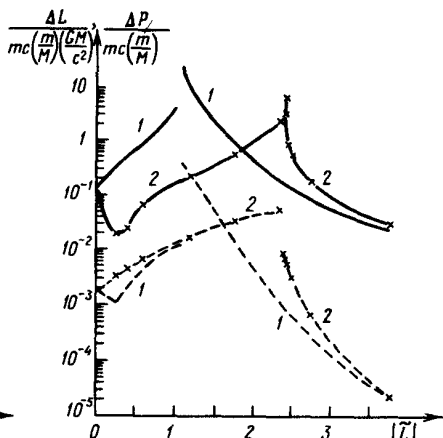


Рис. 45

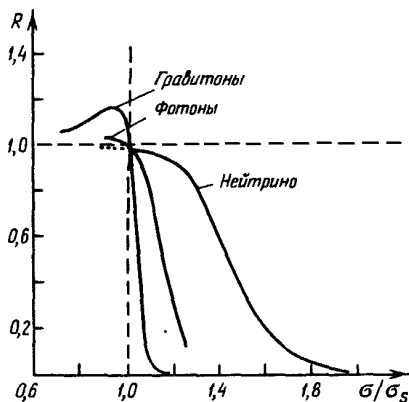


Рис. 46

Рис. 44. Полная излученная энергия при падении частицы с $v_\infty = 0$ в экваториальной плоскости черной дыры как функция $|\tilde{L}|$: 1 — $\tilde{L} > 0$, $a/M = 0,99$; 2 — $\tilde{L} < 0$, $a/M = 0,99$; 3 — $a = 0$

Рис. 45. Полные излученные угловой момент (сплошная линия) и импульс (пунктир). Обозначения те же, что и на рис. 44

Рис. 46. Зависимость коэффициента отражения R от частоты σ

случае никакого "звонového" излучения нет. В первом случае вслед за незатухающим цугом волн, связанных с продолжительным кружением частицы около критической окружности захвата, видно затухающее "звонové" излучение. Простая оценка показывает, что в первом случае частота излучения гравитационных волн частиц в периастре примерно совпадает с собственной частотой моды $l = -m = 2$.

На рис. 44 и 45 приведены зависимости излученной энергии, углового момента и импульса от $\tilde{L}$ для черной дыры с $a/M = 0,99$.

В § 8.1 нами будет рассмотрено интересное явление, называемое суперрадиацией. Его теорию логично рассматривать после изложения общей теории черных дыр (гл. 6). Но, с другой стороны, явление суперрадиации относится к распространению волн в окрестности вращающейся черной дыры. Поэтому здесь мы лишь коротко изложим физическую суть явления и приведем его численные характеристики.

Будем рассматривать процесс облучения вращающейся черной дыры какой-либо волной (например, гравитационной), имеющей определенную частоту ω и мультипольность. Как уже было показано для случая шварцшильдовской черной дыры, при этом возможно (в общем случае) частичное проникновение волны сквозь потенциальный барьер и поглощение ее черной дырой, частичное рассеяние на бесконечность (§ 3.2). При этом амплитуда рассеянной волны всегда меньше (или равна) амплитуды падающей, так как часть волны поглощается черной дырой. Рассмотрение этого вопроса в случае вращающейся черной дыры показывает, что при определенных параметрах облучающей волны возможно увеличение амплитуды рассеянной волны по сравнению с падающей. Это и есть явление суперрадиации [Зельдович (1970*)]. Добавочная энергия при этом черпается из "вращательной энергии" черной дыры. В § 8.1 будет показано, что для возникновения суперрадиации необходимо, чтобы частота волны лежала в пределах

$$0 < \omega < \omega_S, \quad (4.7.6)$$

где

$$\omega_S = -\frac{am}{2Mr_+} \quad (4.7.7)$$

(m — отрицательное).

Расчет явления суперрадиации сводится к анализу свойств решения уравнений типа (4.7.1) [см., например, Чандрасекар (1979b)]. На рис. 46, заимствованном из цитированной работы, приводятся графики, показывающие зависимость коэффициента отражения R от частоты падающей волны для волн разной природы (R есть отношение квадрата амплитуд отраженной и падающей волн). Из рисунка видно, что для гравитационных и электромагнитных волн при $\omega < \omega_S$ $R > 1$, т.е. имеется суперрадиация. В то же время для нейтрино суперрадиация отсутствует. Причина последнего факта проанализирована в работах Мартеллини, Тревеса (1977), Чандрасекара (1979b), Айера, Кумара (1979).

Наконец, отметим, что метрика Керра вне горизонта событий, по-видимому, стабильна относительно малых возмущений, как и метрика Шварцшильда [обзор проблемы см. Торн (1976)]. О неустойчивости этой метрики внутри горизонта событий см. § 12.4.

В заключение данного параграфа рассмотрим рассеяние параллельного пучка волн, падающих на вращающуюся черную дыру. Ко времени написания этой книги опубликованы только данные о рассеянии пучка гравитационных волн, параллельного оси вращения черной дыры [Хандлер, Метцнер (1980)]. Эта задача аналогична задаче о рассеянии волн шварцшильдовской черной дырой (см. § 3.5) и решается аналогичными методами. В приближении геометрической оптики рассеяние рассматривалось в предыдущем параграфе.

На рис. 47 [Хандлер, Метцнер (1980)] приведены дифференциальные сечения рассеяния гравитационных волн, падающих параллельно оси вращения черной дыры с $a/M = 0.9$. Положительные ω соответствуют круговой поляризации волн в сторону вращения черной дыры, отрицательные — противоположной круговой поляризации. Как видно из рисунка, основные

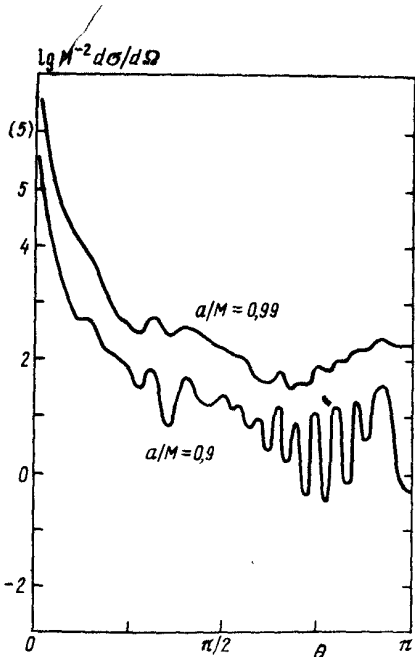
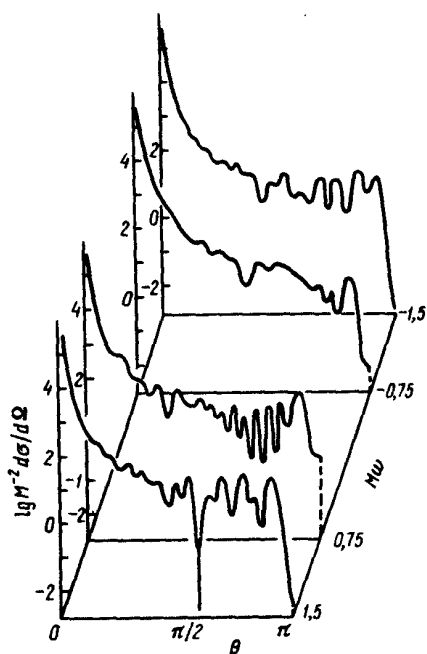


Рис. 47. Дифференциальное сечение рассеяния гравитационного излучения вращающейся черной дыры с $a/M = 0,9$ для различных частот ω

Рис. 48. Два дифференциальных сечения рассеяния гравитационного излучения с $M\omega = 0,75$ черной дырой с $a/M = 0,9$ и $0,99$. В последнем случае важно явление суперрадиации. Кривая для этой ситуации сдвинута вверх по оси ординат на единицу (для ясности изображения). Цифра 5 в скобках на оси ординат относится только к этой кривой

особенности дифференциального сечения аналогичны особенностям для случая невращающейся черной дыры, хотя и существенно усложнены вращением дыры. Полные сечения поглощения излучения σ следующие:

$M\omega$	0,75	1,5	-0,75	-1,5
σM^{-2}	36,5	62,5	88,7	80,3

Наконец, на рис. 48 показано дифференциальное сечение рассеяния для черной дыры с $a/M = 0,99$ и $M\omega = 0,75$. В этом случае явление суперрадиации весьма существенно. Полное сечение поглощения здесь отрицательно и равно $-15,8 M^2$. Сравнение этого случая с рассмотренным выше случаем $a/M = 0,9$, $M\omega = 0,75$ показывает, что суперрадиация добавляется к обычному рассеянию, "замывая" минимумы на кривых. Особенно сильно это сказывается на величине сечения при рассеянии строго назад ($\theta = \pi$).

§ 4.8. Заряженная вращающаяся черная дыра

Согласно замечанию, приведенному на с. 52, электрическим зарядом черной дыры можно обычно пренебречь в любой реально мыслимой ситуации. Отношение заряда Q к массе M черной дыры обычно не может быть больше 10^{-18} [Уолд (1984)]. Действительно, поскольку отношение заряда к массе электрона и протона есть соответственно $(q/m)_e = 10^{21}$, $(q/m)_p = 10^{18}$, а отношение гравитационной силы к электростатической для взаимодействия этих частиц с черной дырой заряда Q и массы M есть по порядку величины qQ/mM , то отношение Q/M не может быть больше $(q/m)^{-1}$. В противном случае заряды того же знака отталкивались бы от дыры, а заряды противоположного знака, падая, нейтрализовали бы заряд дыры.

Однако с теоретической точки зрения было бы интересно рассмотреть — хотя бы кратко — общий случай вращающейся заряженной черной дыры.

Метрика пространства-времени в этом случае записывается в виде (4.2.1), только выражение для Δ теперь зависит от заряда Q (геометрия Керра — Ньюмена):

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2. \quad (4.8.1)$$

Помимо гравитационного поля, черную дыру теперь окружает стационарное электромагнитное поле, которое полностью определяется зарядом Q и параметром a . Вектор-потенциал этого поля в координатах (4.2.1), (4.8.1) записывается в виде

$$A_\alpha dx^\alpha = -\frac{Qr}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi). \quad (4.8.2)$$

Если $a = 0$, вращение отсутствует и метрика представляет собой сферически-симметричную заряженную черную дыру со сферически-симметричным электрическим полем [решение Рейсснера (1916) — Нордстрема (1918)].

При наличии вращения ($a \neq 0$), помимо электрического поля, имеется еще магнитное поле, обусловленное увлечением инерциальной системы отсчета во вращательное движение вокруг черной дыры.

На больших расстояниях от черной дыры в "жесткой" системе отсчета (хронометрической; см. § 4.3), переходящей на бесконечности в лоренцеву, наибольшие компоненты электромагнитного поля соответствуют монополю электрическому полю с зарядом Q и дипольному магнитному полю с магнитным моментом $\mu^* = Qa$. Остальные моменты поля также однозначно выражаются через Q и a [подробнее см. Козн, Уолд (1971), Ханни, Руффини (1973)]. При наличии заряда горизонт в решении Керра — Ньюмена имеется при выполнении условия $M^2 > Q^2 + a^2$, т.е. только при этом условии решение описывает черную дыру и только такие решения мы рассматриваем (ср. обсуждение в § 4.4).

Движение заряженной пробной частицы в метрике Керра — Ньюмена может быть записано в виде, аналогичном (4.5.1) — (4.5.4). Обозначим через E сохраняющуюся энергию частицы с зарядом q и массой покоя m :

$$E = -(p_t + qA_t), \quad (4.8.3)$$

где p_α — 4-импульс частицы; сохраняющаяся проекция момента импульса частицы на ось черной дыры

$$L_z = p_\varphi + qA_\varphi.$$

Уравнения движения записываются в виде

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \{ [E(r^2 + a^2) - L_z a - qQr]^2 - \Delta [m^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + Q^*] \}^{1/2}. \quad (4.8.4)$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \left\{ Q^* - \cos^2 \theta \left[a^2 (m^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.8.5)$$

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = - \left(aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - L_z a - qQr], \quad (4.8.6)$$

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = -a(aE \sin^2 \theta - L_z) + (r^2 + a^2) \Delta^{-1} [E(r^2 + a^2) - L_z a - qQr] \quad (4.8.7)$$

[выражение для Q^* см. (4.5.5)].

Следует подчеркнуть, что в таком общем виде уравнения описывают не только явления, специфичные для черной дыры (в основном разобранные в предыдущих параграфах), но и комбинацию их с обычными эффектами движения пробной частицы в электромагнитном поле.

Физические поля в пространстве-времени Керра — Ньюмена обладают многими свойствами рассмотренных выше полей Шварцшильда и вращающейся черной дыры. Помимо этого, в поле заряженной вращающейся черной дыры появляется качественно новое явление — взаимопревращение электромагнитных и гравитационных волн. Мы остановимся на нем в гл. 8.

Распространение волн в метрике Рейсснера — Нордстрема и доказательство ее устойчивости вне горизонта событий рассмотрены в работах Бичака (1972, 1979), Сибгатуллина, Алексеева (1974*), Монкрифа (1974с, 1975), Зерилли (1974), Чандрасекара, Ксантопулоса (1979), Сибгатуллина (1984*). Полная математическая трактовка этой проблемы для вращающейся заряженной черной дыры изложена в уже упоминавшейся книге Чандрасекара (1983). О неустойчивости метрики Рейсснера — Нордстрема внутри горизонта событий см. §§ 12.2, 12.3.

§ 5.1. Асимптотически плоские пространства.

Диаграммы Пенроуза

До сих пор при описании свойств черных дыр мы ограничивались рассмотрением метрики Шварцшильда и метрики Керра, а соответствующее пространство-время было стационарным и обладало дополнительным свойством симметрии. Исследование геодезических (отвечающих движению пробных частиц и лучей света) и волновых полей в этих метриках позволило нам описать ряд интересных и важных особенностей протекания физических эффектов в поле таких черных дыр. Естественно, возникает вопрос: а существуют ли черные дыры, отличные от описанных? Каковы их свойства? Чтобы ответить на эти вопросы, прежде всего требуется распространить приведенное выше определение на общий случай, когда пространство-время уже не является стационарным. Такое обобщение очевидно. Резонно и в общем случае называть черной дырой область пространства-времени, откуда невозможен выход к отдаленному наблюдателю никаких, несущих информацию сигналов.

Для придания строгого смысла этому определению следует лишь уточнить, о каком классе наблюдателей идет речь и что на геометрически инвариантном языке означает понятие "отдаленный". Необходимые уточнения легко сделать в том физически важном случае, когда вещество и источники поля вдали от черной дыры отсутствуют, так что при удалении от нее геометрия пространства-времени все меньше отличается от плоской. Пространство-время, обладающее этим свойством, называют асимптотически плоским.

При изучении черных дыр необходимость строгих определений для, казалось бы, наглядных понятий очевидна, ибо само существование этих объектов принципиально меняет структуру пространства-времени и его глобальные свойства по сравнению с плоским пространством-временем Минковского. Так, например, в пространстве-времени Шварцшильда имеется сингулярность, не все нулевые геодезические уходят на бесконечность. Заметим, что такой геодезической является, например, круговая орбита светового луча при $r = 1,5 r_g$, причем эта геодезическая целиком лежит вне черной дыры. Особо сложные ситуации могут возникать при формировании черных дыр, их динамическом взаимодействии и слиянии. Полуинтуитивных, наглядных соображений тут явно недостаточно.

Строгое определение асимптотически плоских пространств было предложено Пенроузом (1963). К этому определению можно прийти посредством следующих рассуждений.

Рассмотрим сначала, как устроено на бесконечности плоское пространство-время Минковского M . Для этого поступим обычным в геометрии

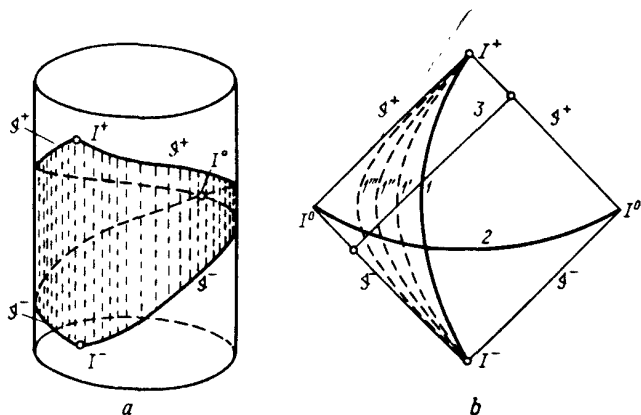


Рис. 49а. Конформная структура пространства-времени Минковского

Рис. 49б. Диаграмма Пенроуза пространства-времени Минковского. На диаграмме изображены времениподобные (1, 1', ...), пространственноподобная (2) и световая (3) геодезические

способом — сделаем необходимое конформное преобразование, приближающее бесконечно удаленные точки на конечное расстояние. Перейдем сначала от обычных сферических координат t, r, θ, φ в пространстве-времени M к новым координатам $\psi, \xi, \theta, \varphi$ с помощью следующего преобразования:

$$t + r = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\psi + \xi), \quad \theta = \theta, \quad (5.1.1a)$$

$$t - r = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\psi - \xi), \quad \varphi = \varphi, \quad (5.1.1b)$$

$$-\pi/2 \leq \psi - \xi \leq \psi + \xi \leq \pi/2.$$

Тогда интервал ds^2 записывается в виде

$$ds^2 = \Omega^{-2} d\tilde{s}^2, \quad d\tilde{s}^2 = -d\psi^2 + d\xi^2 + \sin^2 \xi d\omega^2, \quad (5.1.2a)$$

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

где

$$\Omega = 2 \cos \frac{1}{2} (\psi + \xi) \cos \frac{1}{2} (\psi - \xi). \quad (5.1.2b)$$

Точкам на бесконечности в пространстве-времени Минковского соответствуют значения $\psi + \xi$ и $\psi - \xi$, равные $\pm \pi/2$. Метрика ds^2 при этих значениях координат теряет смысл, но конформная ей метрика $d\tilde{s}^2$ при этом регулярна *). Изучая конформную структуру на многообразии (5.1.1) с границей, мы изучаем тем самым конформную структуру пространства-времени Минковского, включая бесконечность. Напомним, что при иссле-

*) При $\xi = 0$ и $\xi = \pi$ метрика $d\tilde{s}^2$ имеет устранимые координатные сингулярности.

довании общих свойств пространства-времени именно конформная структура важна, так как она определяет причинные свойства окрестности точек, в том числе и свойства световых конусов.

Метрика $d\tilde{s}^2$ является метрикой 4-мерного цилиндра $S^3 \times E^1$ (рис. 49а). Неравенства (5.1.1b) вырезают на цилиндре область, соответствующую M , на рис. 49а она заштрихована (разумеется, мы можем изобразить только две из четырех координат, θ и φ опущены). Если вырезать из цилиндра область M , разрезать ее в точке I^0 и развернуть на плоскость, то получим рис. 49б. В таком виде обычно изображают конформный мир Минковского. Это — так называемая *диаграмма Пенроуза* для M . Надо помнить, что на рис. 49б левая и правая точки I^0 совпадают, т.е. должны быть "склеены".

На диаграмме Пенроуза все времениподобные кривые начинаются в точке I^- и заканчиваются в точке I^+ , а все пространственные сечения проходят через I^0 . Поэтому I^- называют *временной бесконечностью прошлого*, I^+ — *временной бесконечностью будущего*, I^0 — *пространственной бесконечностью*.

Все нулевые геодезические в M начинаются на границе $\mathcal{U}^-$ (на световом конусе будущего точки I^-) и заканчиваются на $\mathcal{U}^+$ (на световом конусе прошлого точки I^+). Границы $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$ называют соответственно *световой бесконечностью прошлого* и *световой бесконечностью будущего*. Мы видим, что границами M являются "бесконечности" $\mathcal{U}^-$, $\mathcal{U}^+$ и точки I^- , I^+ , I^0 .

С помощью диаграмм Пенроуза удобно изучать глобальную структуру пространства-времени и в случае, когда геометрия существенно отличается от плоской. При этом принято использовать координаты, в которых световые лучи изображаются прямыми линиями с наклоном 45° (этим свойством обладают, в частности, использованные выше координаты ψ , ξ). В таких координатах особенно наглядна причинная структура, определяемая расположением локальных световых конусов. Само собой разумеется, что на двумерных диаграммах Пенроуза изображается геометрия определенных двумерных сечений пространства-времени.

Вернемся теперь к вопросу о бесконечно удаленных наблюдателях. Мировые линии таких наблюдателей, покоящихся в точках r, r', r'', r''' ($r < r' < r'' < r'''$), изображены на рис. 49б линиями l, l', l'', l''' соответственно. Чем больше величина r , тем ближе к $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$ проходит соответствующая линия. В пределе $r \rightarrow \infty$ она стремится к $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$. Поэтому логично называть бесконечно удаленными границами M именно $\mathcal{U}^-$ и $\mathcal{U}^+$. Заметим, что фактор Ω в (5.1.2), осуществляющий конформное преобразование, обращается в нуль на $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}^+ \cup \mathcal{U}^-$, а его градиент

$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \right|; \neq 0$ является световым вектором, касательным к образующим

поверхности $\mathcal{U}$.

Для исследования мира вблизи $\mathcal{U}$ бывает удобно пользоваться вместо (5.1.1) другими координатами. Заметим, что интервал в мире Минковского может быть записан с использованием запаздывающей световой

координаты $u = t - r$:

$$ds^2 = -du^2 - 2du dr + r^2 d\omega^2. \quad (5.1.3)$$

Далее, сделав преобразование $\rho = r^{-1}$, можно записать метрику в следующем конформном виде:

$$ds^2 = \Omega^{-2} d\tilde{s}^2, \quad d\tilde{s}^2 = -\rho^2 du^2 + 2du d\rho + d\omega^2, \\ \Omega = \rho = r^{-1}. \quad (5.1.4)$$

В этих координатах поверхность $\mathcal{I}^+$ описывается уравнением $\rho = 0$. Точка на $\mathcal{I}^+$ с координатами u_0, θ_0, φ_0 отвечает переходу к пределу $r \rightarrow \infty$ вдоль выходящего светового луча $u = u_0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$. Координаты (5.1.4), однако, неприменимы для описания $\mathcal{I}^-$. Аналогичным образом, путем замены u на опережающую световую координату $v = t + r$, можно описать $\mathcal{I}^-$.

Исходя из того, что свойства асимптотически плоского пространства в окрестности "бесконечности" должны быть аналогичны свойствам пространства Минковского, Пенроуз (1963, 1964, 1965b, 1968) предложил следующие определения.

Сначала определяются так называемые асимптотически простые миры.

Пространство-время M с метрикой $g_{\mu\nu}$ называют *асимптотически простым*, если существуют другое, "нефизическое" пространство $\tilde{M}^*$ с границей $\partial\tilde{M} \equiv \mathcal{I}$ и регулярная метрика $\tilde{g}_{\mu\nu}$ на нем такие, что 1) $\tilde{M} \setminus \partial\tilde{M}$ конформно M , причем $g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu}$; 2) $\Omega|_M > 0, \Omega|_{\partial\tilde{M}} = 0, \Omega_{,\mu}|_{\partial\tilde{M}} \neq 0$; 3) каждая световая геодезическая в $\tilde{M}$ начинается и оканчивается на $\partial\tilde{M}$.

Если в окрестности $\mathcal{I}$ метрика $g_{\mu\nu}$ удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна (или уравнениям Эйнштейна с тензором энергии-импульса, достаточно быстро убывающим на бесконечности) и выполнены естественные требования причинности и ориентируемости пространства-времени, то, как показал Пенроуз, асимптотически простое пространство обладает следующими свойствами:

1. Пространство M имеет топологию R^4 , а его граница $\mathcal{I}$ является светоподобной и состоит из двух несвязных компонент $\mathcal{I} = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$, каждая из которых имеет топологию $S^2 \times R^1$.

2. Образующими поверхностей $\mathcal{I}^\pm$ являются световые геодезические в пространстве $\tilde{M}$, касательные векторы к которым совпадают с $\tilde{g}^{\mu\nu} \Omega_{,\mu}|_{\mathcal{I}}$.

3. При удалении в бесконечность вдоль световой геодезической тензор кривизны в физическом пространстве M убывает, причем имеет место свойство так называемого *последовательного вырождения*. Мы не будем подробно останавливаться здесь на этом свойстве, детальное описание его можно найти в литературе [см., например, Сакс (1964), Сибгатуллин (1984*)].

Свойство 1 означает, что асимптотически простое пространство глобально устроено так же, как пространство Минковского. В частности, оно имеет сходную причинную структуру, и в нем "нет места" для черных дыр. Чтобы учесть возможность существования локализованных областей с

*) Это пространство мы будем называть пространством Пенроуза.

сильным гравитационным полем, наличие которых не изменяет асимптотических (при $r \rightarrow \infty$) свойств пространства-времени, достаточно рассмотреть класс пространств, которые с помощью "вырезания" отдельных внутренних областей, содержащих те или иные особенности (связанные с сильным гравитационным полем), с последующим гладким "заклеиванием" образовавшихся "дыр" могут быть превращены в асимптотически простые пространства. Такие пространства получили название *асимптотически простых в слабом смысле*. Более строго, пространство M называют асимптотически простым в слабом смысле, если существует асимптотически простое пространство $\tilde{M}$ такое, что для некоторого его открытого подмножества K ($\partial\tilde{M} \subset K$) область $\tilde{M} \cap K$ изометрична подмножеству M . Асимптотически простые в слабом смысле пространства, в которых метрика в окрестности $\mathcal{J}$ удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна (или уравнениям Эйнштейна с достаточно быстро убывающим тензором энергии-импульса), будем называть *асимптотически плоскими*.

Пространство-время Шварцшильда (2.2.1) и Керра (4.2.1) асимптотически плоские. Диаграммы Пенроуза для них изображены на рис. 50 с и 67. Метрика $d\tilde{s}^2$ пространства, конформного пространству-времени шварцшильдовской вечной черной дыры, может быть получена из метрики (2.7.12) путем перехода от координат Крускала $\tilde{u}, \tilde{v}$ к координатам

$$\Psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tilde{v}}{1 - (\tilde{v}^2 - \tilde{u}^2)}, \quad \xi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tilde{u}}{1 + (\tilde{v}^2 - \tilde{u}^2)},$$

$$-\pi/2 < \Psi + \xi < \pi/2, \quad -\pi/2 < \Psi - \xi < \pi/2,$$

$$-\pi/4 < \Psi < \pi/4,$$

с последующим выделением конформного фактора.

Отмеченное выше свойство 3 означает, что в асимптотически плоских пространствах в окрестности $\mathcal{J}$ эффекты, связанные с кривизной, пренебрежимо малы, а само пространство-время мало отличается от плоского. В частности, в этой области с хорошей точностью выполняются обычные законы сохранения энергии-импульса, а движение пробных тел приближенно можно считать равномерным и прямолинейным. В соответствии с этим в асимптотически плоском пространстве можно определить группу асимптотических симметрий. Для этого заметим, что преобразование из группы Пуанкаре пространства Минковского в декартовых координатах имеет следующий вид:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (5.1.5)$$

где Λ^μ_ν — матрица преобразования Лоренца, a^μ — вектор трансляции, отвечающий сдвигу начала координат. Введем теперь в пространстве Минковского запаздывающие (u, r, θ, φ) или опережающие (v, r, θ, φ) координаты, и пусть w обозначает либо запаздывающую (u), либо опережающую (v) временную координату. Тогда преобразованию (5.1.5) отвечает следующее преобразование координат w, r, θ, φ :

$$w' = w'(w, r, \theta, \varphi), \quad r' = r'(w, r, \theta, \varphi),$$

$$\theta' = \theta'(w, r, \theta, \varphi), \quad \varphi' = \varphi'(w, r, \theta, \varphi). \quad (5.1.6)$$

В пределе $r \rightarrow \infty$ функции, описывающие это преобразование, принимают

более простой вид. В частности, сдвигам ($\Lambda^\mu{}_\nu = 0$) в физическом пространстве-времени в этом пределе отвечают следующие преобразования:

$$\begin{aligned} w' &= w + a_0 + a_1 \sin \theta \cos \varphi + a_2 \sin \theta \sin \varphi + a_3 \cos \theta, \\ \theta' &= \theta, \quad \varphi' = \varphi, \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

осуществляющие сдвиг поверхности $\mathcal{U}$ вдоль своих образующих.

Этот результат можно описать более формальным образом, допускающим естественное обобщение на случай произвольных асимптотически плоских пространств. Пусть ξ^μ — векторное поле Киллинга, отвечающее преобразованию симметрии в физическом пространстве-времени M ($\nabla^\nu \xi^\mu = 0$); тогда в конформном пространстве $\tilde{M}$ оно удовлетворяет соотношению

$$\tilde{\nabla}^\nu \xi^\mu - \Omega^{-1} \tilde{\nabla}_\alpha \Omega \xi^\alpha \tilde{g}^{\nu\mu} = 0, \quad (5.1.8)$$

где $\tilde{\nabla}^\mu$ — ковариантная производная в метрике $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$. В общем случае, если пространство-время M не допускает точных изометрий, уравнение (5.1.8) не имеет нетривиальных решений. Это справедливо, в частности, для асимптотически плоских пространств общего вида. Однако, если ограничиться рассмотрением окрестности $\mathcal{U}$ и потребовать, чтобы уравнение (5.1.8) выполнялось лишь на $\mathcal{U}$, то оно вновь имеет решения. Эти решения определяют векторные поля, генерирующие преобразования асимптотических симметрий. Замечательным является тот факт, что группа, отвечающая этим преобразованиям, не зависит от того или иного конкретного выбора представителя класса асимптотически плоских пространств. Эта группа получила название группы Бонди — Метцнера — Сакса (сокращенно БМС-группы). Подробное изложение ее свойств и описание ее представлений можно найти в работах Сакса (1962), Бонди и др. (1962), Пенроуза (1964), Маккарти (1972а, б, 1973), Маккарти, Крэмпина (1973), Воловича и др. (1978*). Здесь мы лишь кратко остановимся на основных свойствах этой группы, существенных для дальнейшего изложения.

Из-за того, что БМС-группа преобразований сохраняет лишь асимптотический вид метрики, а гравитационное поле медленно спадает на бесконечности, эта группа бесконечномерна и шире, чем группа Пуанкаре, точно сохраняющая форму метрики плоского пространства. Важным свойством БМС-группы является то, что в ней имеется однозначно выделяемая нормальная 4-мерная подгруппа преобразований трансляций. В пространстве Минковского действие этой подгруппы на $\mathcal{U}$ совпадает с (5.1.7). В общем случае в асимптотически плоском пространстве в окрестности $\mathcal{U}$ можно ввести координаты, в которых преобразования подгруппы трансляций имеют вид (5.1.7). Подобные координаты называют *конформными координатами Бонди* [см. Тамбурино, Веникур (1966), Волович и др. (1978*)].

Итак, мы описали класс асимптотически плоских пространств, обладающих асимптотическим поведением, сходным с асимптотическим поведением пространства Минковского, и изложили кратко их свойства. В этом классе пространств естественным образом можно ввести понятие асимптотически удаленного наблюдателя, движение которого происходит почти по инерции. Теперь можно дать строгое определение черной дыры. Однако

прежде чем сделать это, мы остановимся кратко еще на одном вопросе, связанном с теорией рассеяния безмассовых полей в асимптотически плоских пространствах, которая нам потребуется в последующих главах.

Введенное выше определение асимптотически плоского пространства оказывается особенно удобным при обсуждении задачи рассеяния безмассовых полей и, в частности, при описании свойств гравитационного излучения. Универсальный характер поведения ($\sim 1/r$) в волновой зоне (в асимптотической области) этих полей позволяет с помощью конформного преобразования перейти от задачи рассеяния в физическом пространстве-времени к задаче с регулярными начальными данными на световой границе прошлого $\mathcal{I}^-$ в пространстве Пенроуза. При этом оказывается, что из регулярности поведения конформно преобразованного поля в окрестности $\mathcal{I}$ вытекает определенный закон спада этого поля в асимптотической области.

Проиллюстрируем сказанное на примере скалярного безмассового конформно-инвариантного поля, описываемого уравнением

$$\left(\square - \frac{1}{6}R\right)\varphi = 0 \quad (5.1.9)$$

в асимптотически плоском пространстве $(M, g_{\mu\nu})$. Осуществим с помощью конформного преобразования $g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}\tilde{g}_{\mu\nu}$ переход к конформному пространству Пенроуза $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Omega)$, дополнив его конформным преобразованием поля $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = \Omega^{-1}\varphi$. Значения поля $\tilde{\varphi}$ на световых границах прошлого $\mathcal{I}^-$ и будущего $\mathcal{I}^+$ будем называть *образами поля* φ на $\mathcal{I}^-$ и $\mathcal{I}^+$ и обозначать соответствующей заглавной буквой:

$$\tilde{\varphi}|_{\mathcal{I}^\mp} = \Phi_{\text{in/out}}. \quad (5.1.10)$$

Поле $\tilde{\varphi}$ в пространстве Пенроуза удовлетворяет уравнению

$$\left(\tilde{\square} - \frac{1}{6}\tilde{R}\right)\tilde{\varphi} = 0, \quad (5.1.11)$$

где $\tilde{\square} = \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{\nabla}_\beta$ и $\tilde{R}$ — скалярная кривизна метрики $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Задание образа Φ_{in} поля φ в асимптотически простом пространстве позволяет найти φ путем решения уравнения (5.1.11) с начальными данными на регулярной световой поверхности $\mathcal{I}^-$ и тем самым определить Φ_{out} . Иными словами, в асимптотически простом пространстве при условии, что асимптотически регулярное решение существует глобально, имеет место взаимно однозначное соответствие между полем φ и его образами на $\mathcal{I}^-$ и $\mathcal{I}^+$:

$$\Phi_{\text{in}} \longleftrightarrow \varphi \longleftrightarrow \Phi_{\text{out}}. \quad (5.1.12)$$

Условие асимптотической регулярности при этом играет роль условия излучения, а задача классической теории рассеяния может быть сформулирована как задача нахождения образа на $\mathcal{I}^+$ решения φ , которое обладает заданным образом на $\mathcal{I}^-$. Заметим, что асимптотически регулярное поле в асимптотической области (вблизи $\mathcal{I}$) имеет вид

$$\varphi \sim \Phi\Omega. \quad (5.1.13)$$

В пространствах Минковского в координатах (5.1.4) это поведение отвечает следующей асимптотике в волновой зоне:

$$\varphi \sim \frac{\Phi_{\text{out}}(u, \theta, \varphi)}{r}. \quad (5.1.14)$$

Описанный метод легко обобщается на случай других безмассовых полей [по этому поводу см., например, Пенроуз (1965b, 1968), Пирани (1964), Волович и др. (1978*), Фролов (1979, 1986*)].

Наличие группы асимптотических симметрий в асимптотически плоском пространстве позволяет определить для безмассовых полей такие величины, как энергия и импульс падающего или выходящего потока. Пусть $\xi_{(a)}^\nu$ ($a = 0, 1, 2, 3$) — генераторы подгруппы трансляций БМС-группы, действующие на $\mathcal{J}^\pm$. Выражение для энергии ($a = 0$) и импульса ($a = 1, 2, 3$) падающего (выходящего) излучения записывается следующим образом:

$$P_{\mathcal{J}^\pm}^a = - \int_{\mathcal{J}^\pm} \tilde{T}_{\mu\nu} \xi_{(a)}^\nu \tilde{g}^{\mu\alpha} d\sigma_\alpha, \quad (5.1.15)$$

где $\tilde{T}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} T_{\mu\nu}$, а $T_{\mu\nu}$ — метрический тензор энергии-импульса рассматриваемого поля. Нетрудно убедиться, что для асимптотически регулярных полей в плоском пространстве-времени $P_{\mathcal{J}^\pm}^a$ совпадает с полной энергией-импульсом системы, определяемой стандартным образом с помощью векторных полей Киллинга, отвечающих трансляциям. В общем случае в асимптотически плоском пространстве выражение (5.1.15) может быть записано в терминах образов безмассовых полей на $\mathcal{J}^\pm$. В частности, для скалярного поля, удовлетворяющего уравнению (5.1.9), имеем

$$P_{\mathcal{J}^\pm}^a = \int_{\mathcal{J}^\pm} N_a \left[(\partial_u \Phi)^2 - \frac{1}{6} \partial_u^2 \Phi^2 \right] du d\omega, \quad (5.1.16)$$

где

$$N_a = (1, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (5.1.17)$$

Заметим, что для полей φ типа волновых пакетов, обладающих конечной энергией, значение $|\partial_u \Phi^2|$ убывает при $|u| \rightarrow \infty$ и второй член после интегрирования по частям может быть опущен:

$$P_{\mathcal{J}^\pm}^a = \int_{\mathcal{J}^\pm} N_a (\partial_u \Phi)^2 du d\omega. \quad (5.1.18)$$

Аналогичным образом записываются в терминах образов полей на $\mathcal{J}^\pm$ выражения для энергии-импульса падающего и выходящего потоков для других безмассовых полей [см., например, Фролов (1986*)].

§ 5.2. Горизонт событий. Теорема Пенроуза

Теперь мы можем дать строгое определение понятия черной дыры. В асимптотически плоском пространстве-времени черная дыра определяется как такая область, откуда никакой причинный (т.е. движущийся со скоростью, не превосходящей скорости света) сигнал не может выйти на $\mathcal{J}^+$. Причинная кривая, описывающая распространение подобного сигнала, является гладкой кривой (касательный вектор к которой u^μ обладает свойством $u_\mu u^\mu \leq 0$) либо состоит из кусков таких кривых. Определим причинное прошлое $J^-(Q)$ для некоторого множества Q как множество точек, обладающих тем свойством, что для каждой из них найдется причинная кривая, направленная в будущее и соединяющая ее с одной из точек Q . Множество событий, видимых отдаленным наблюдателем, совпадает с

$J^-(\mathcal{I}^+)$. Граница этого множества $J^-(\mathcal{I}^+)$, которую мы будем обозначать H^+ , называется *горизонтом событий*. Горизонт событий является границей черной дыры. Разумеется, в ограниченной области пространства-времени может существовать не одна, а несколько черных дыр, могут возникать новые дыры, существующие дыры могут взаимодействовать и сливаться. В этом случае $J^-(\mathcal{I}^+)$ является совокупностью границ всех черных дыр. Отсутствие горизонта событий в асимптотически плоском пространстве означает, что все события, происходящие в этом пространстве, со временем могут быть зарегистрированы отдаленным наблюдателем. Появление горизонта событий свидетельствует о возникновении черной дыры, о том, что в результате сильного возрастания гравитационного поля качественно изменяется причинная структура пространства-времени. Возросшее гравитационное поле препятствует выходу сигналов наружу, в результате чего наблюдатель, если только он не решится пересечь горизонт событий и упасть внутрь черной дыры, никогда не узнает о том, что происходит внутри нее.

На рис. 50а и б изображена сферически-симметричная черная дыра, возникающая при коллапсе сферической звезды. Это, как мы знаем, простейший вид черной дыры. На рис. 50а показано пространство-время такой дыры в координатах Эддингтона — Финкельштейна, на рис. 50б — диаграмма Пенроуза для соответствующего пространства-времени. Последнюю можно получить из диаграммы Пенроуза для полного пространства-времени вечной черной дыры, изображенной на рис. 50с, "разрезанием" ее вдоль линии l , отвечающей движению поверхности коллапсирующего тела, с последующим "приклеиванием" слева части диаграммы Пенроуза, описывающей метрику внутри коллапсирующего тела. Как видно из последнего рисунка, поверхность гравитационного радиуса вне коллапсирующего тела совпадает с H^+ , область внутри H^+ является черной дырой. Бесконечность данного пространства-времени (рис. 50б) устроена так же, как и бесконечность пространства-времени Минковского. Следует обратить внимание на то, что область, из которой лучи света не могут выйти на бесконечность (т.е. черная дыра), возникает не в момент времени, когда звезда сжимается до размера, равного ее гравитационному радиусу (не в момент τ_1), а раньше — в момент τ_0 . Горизонт событий H^+ образуют сигналы, идущие со скоростью света и вышедшие из центра звезды как раз в такой момент τ_0 , что достигают поверхности звезды, когда она сжимается до гравитационного радиуса.

Пересечение горизонта событий с произвольной пространственноподобной поверхностью $\Sigma(\tau)$, уравнение которой имеет вид $\tau(x) = \text{const}$, в общем случае состоит из набора замкнутых двумерных поверхностей $\partial \mathcal{B}_i(\tau)$ ($i = 1, \dots, N$), которые можно рассматривать как границы существующих в данный момент времени τ черных дыр. Часть $\Sigma(\tau)$, ограниченную $\partial \mathcal{B}_i(\tau)$, называют черной дырой $\mathcal{B}_i(\tau)$ в данный момент времени. Число черных дыр может изменяться со временем.

В окрестности точки возникновения горизонта событий, как видно из рис. 51а, поверхность горизонта не является гладкой. Подобные нерегулярные точки могут возникать на горизонте событий, например, при падении вещества внутрь. Вне этих нерегулярных точек поверхность горизонта событий является светоподобной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим ситуации, изображенные на рис. 51.

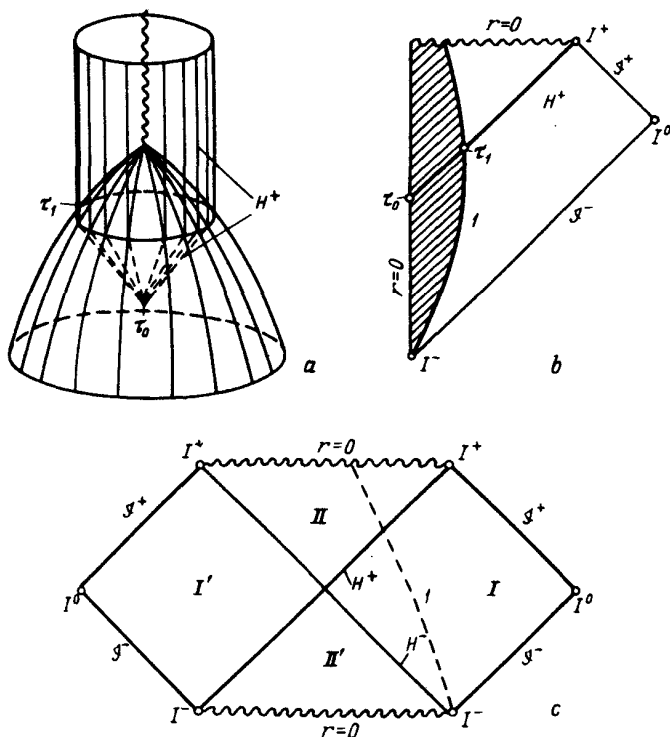


Рис. 50а. Пространство-время сферически-симметричной черной дыры в координатах Финкельштейна

Рис. 50б. Диаграмма Пенроуза для пространства-времени сферически-симметричной черной дыры. Линия l изображает движение поверхности коллапсирующего тела. Конформный фактор выбран так, что линия $r=0$ (центр тела) вертикальна

Рис. 50с. Диаграмма Пенроуза для "вечных" черной и белой дыр. Линия l — мировая линия пробной частицы

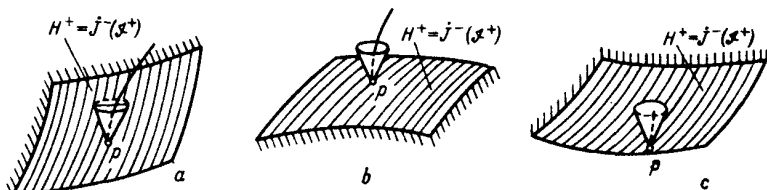


Рис. 51. Регулярная часть горизонта событий является светоподобной поверхностью. Предположение о том, что горизонт событий имеет участок, где он времениподобен (а) или пространственноподобен (б, с), приводит к противоречию. Область, лежащая внутри горизонта событий, заштрихована

Предположим сначала, что в окрестности некоторой регулярной точки p , лежащей на горизонте событий, его поверхность времениподобна (рис. 51а). Чтобы получить противоречие, достаточно рассмотреть поведение световых лучей в малой окрестности точки p . Поскольку пространство-время локаль-

но устроено точно так же, как пространство Минковского, то световые лучи, испущенные из p , образуют локальный световой конус, направленный в будущее. Времениподобная часть горизонта делит этот конус на две части: часть из лучей идет внутрь черной дыры (влево от H^+), а часть — во внешнее пространство (вправо от H^+). Но точки внешнего пространства по определению находятся в $J^-(\mathcal{I}^+)$, а это означает, что из точки p можно послать причинный сигнал, выходящий на $\mathcal{I}^+$. Очевидно также, что это возможно и для точек, лежащих левее H^+ , достаточно близко от p . Последнее, однако, противоречит предположению, что эти точки лежат внутри черной дыры.

Предположим теперь, что горизонт событий имеет регулярную пространственноподобную часть. Если множество $J^-(\mathcal{I}^+)$ расположено в будущем от этой части H^+ (рис. 51b), то световые лучи, испущенные в будущее в точке p и ее малой окрестности, лежащей внутри H^+ , выходят в $J^-(\mathcal{I}^+)$ и тем самым видны для отдаленного наблюдателя. Это противоречит сделанному предположению, что область внутри H^+ является черной дырой. Если множество $J^-(\mathcal{I}^+)$ расположено в прошлом от рассматриваемой части H^+ (рис. 51c), то в малой окрестности этой части H^+ найдется такая точка p , что световой конус будущего с вершиной в этой точке целиком упирается в H^+ . Это значит, что событие p не видно отдаленному наблюдателю и точка p не может лежать в $J^-(\mathcal{I}^+)$, что противоречит сделанному предположению. Приведенные соображения, хотя, конечно, и не абсолютно строги, показывают, почему регулярные участки горизонта событий являются световыми поверхностями.

Более детальное описание структуры горизонта событий составляет содержание теоремы, доказанной Пенроузом (1968). Согласно этой теореме горизонт событий образован световыми геодезическими (образующими), у которых в будущем нет граничных точек. Если проследить поведе-

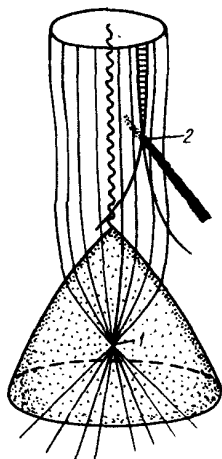


Рис. 52. Иллюстрация к теореме Пенроуза о структуре горизонта событий

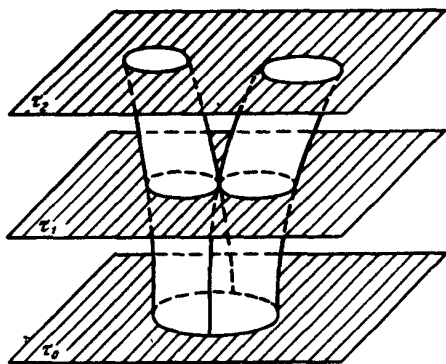


Рис. 53. Черная дыра не может распасться на две или более черных дыр. Ситуация, изображенная на рисунке, когда одиночная черная дыра распадается на две, невозможна

ние любой образующей в будущем, то оказывается, что она никогда не покинет горизонта H^+ и никогда не пересечется с другой образующей. При движении вдоль выбранной образующей в прошлое возможны два варианта: либо она всегда лежит на H^+ , либо в некоторой точке этот световой луч входит в H^+ , покидая область $J^-(J^+)$, лежащую вне черной дыры. В точке входа этой образующей в H^+ имеется пересечение ее с другими образующими (каустика). Вне каустик через каждую точку горизонта проходит только одна образующая. Все сказанное проиллюстрировано на рис. 52. На этом рисунке новые пучки лучей входят в H^+ в каустике 2, когда в черную дыру падает вещество. Каустика 1 отвечает точке возникновения горизонта событий. Каустики могут возникать при падении в черную дыру гравитационного излучения или при слиянии двух или нескольких черных дыр.

Ситуация, изображенная на рис. 53, когда одиночная черная дыра под каким-либо внешним воздействием распадается на две (или более) черные дыры, оказывается невозможной. Действительно, при таком процессе две (или более) удаленные в начальный момент t_0 точки поверхности черной дыры сближаются и пересекаются в момент t_1 образования "перетяжки". Это означает, что по крайней мере пара образующих горизонта событий при продолжении их в будущее пересекаются между собой, что противоречит теореме Пенроуза. Утверждение о невозможности распада или уничтожения черной дыры допускает строгое доказательство, которое можно найти в книге Хокинга, Эллиса (1973).

§ 5.3. Теорема Элерса — Сакса.

Фокусировка световых лучей гравитационным полем

Целый ряд важных свойств черных дыр непосредственно связан с тем, что горизонт событий, ограничивающий черную дыру, является световой поверхностью. Поэтому, прежде чем перейти к изучению этих свойств, остановимся более подробно на описании световых поверхностей в искривленном пространстве-времени.

Пусть в пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$ задана световая поверхность Γ , уравнение которой в локальных координатах x^μ записывается в виде $\varphi(x^\mu) = 0$. Тогда градиентный вектор $\varphi_{,\mu}$ является световым на Γ : $g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} |_{\varphi=0} = 0$. Вне Γ это соотношение, вообще говоря, не выполняется. Однако можно показать [см., например, Курант (1962)], что произвол в выборе функции φ может быть использован так, что поверхность Γ ($\varphi(x) = 0$) окажется включенной в однопараметрическое семейство световых поверхностей Γ_c ($\varphi(x) = c$). Без ограничения общности будем считать, что такое включение произведено. Тогда

$$g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} = 0. \quad (5.3.1)$$

Если обозначить $l^\mu = g^{\mu\nu} \varphi_{,\nu}$, то соотношение (5.3.1) означает, что вектор l^μ — световой и является касательным к поверхностям Γ_c . Более того, используя свойство $\varphi_{,\mu;\nu} = \varphi_{,\nu;\mu}$ и равенство (5.3.1), имеем $l^\nu l_{\mu;\nu} = l^\nu l_{\nu;\mu} =$

$$= \frac{1}{2} (l^\nu l_\nu)_{;\mu} = 0, \text{ т.е. интегральные кривые векторного поля } l^\mu:$$

$$\frac{dx^\mu}{dr} = l^\mu \quad (5.3.2)$$

являются геодезическими, причем r — аффинный параметр. Если начальная точка интегральной кривой (5.3.2) лежит на световой поверхности Γ , то она целиком принадлежит этой поверхности, а сама Γ образована двумерным семейством световых геодезических (образующих). Пусть r — аффинный параметр вдоль образующих, а y^a ($a = 1, 2$) — непрерывные параметры, их "нумерующие". Тогда решение уравнения $\varphi = 0$ можно записать в следующем параметризованном виде: $x^\mu = f^\mu(r, y^a)$, причем имеют место соотношения

$$l^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial r}, \quad l_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial y^a} = 0, \quad l^\mu l_{\nu;\mu} = 0, \quad l^\mu l_\mu = 0. \quad (5.3.3)$$

С физической точки зрения поверхность Γ описывает распространение фронта световой волны, а ее образующие — световые лучи, ортогональные фронту. Если выделить узкий пучок световых лучей, то информацию об их поведении можно получить с помощью следующего эксперимента. Расположим на пути пучка (ортогонально ему) непрозрачный объект, а на некотором расстоянии от объекта поместим ортогонально пучку экран. Тогда теорема, доказанная Элерсом и Саксом [Йордан и др. (1961), Сакс (1961)], утверждает, что все части тени достигают экрана одновременно; размер, форма и ориентация тени зависят только от положения экрана и не зависят от скорости движения наблюдателя, а если экран расположен на малом расстоянии δr от объекта, то увеличение и деформация тени определяются величинами $\theta \delta r$ и $|\sigma| \delta r$, где

$$\theta = \frac{1}{2} l^\alpha_{;\alpha}, \quad |\sigma| = \left[\frac{1}{2} l_{\alpha;\beta} l^{\alpha;\beta} - \theta^2 \right]^{1/2}. \quad (5.3.4)$$

Мы воспроизведем здесь основные этапы доказательства этой теоремы применительно к рассматриваемому случаю. Это позволит нам более

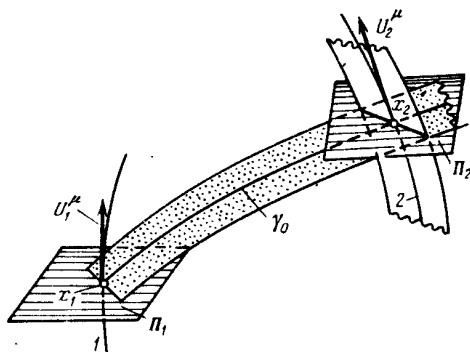


Рис. 54. Иллюстрация к теореме Элерса – Сакса о распространении световых лучей

детально описать ряд важных характеристик световых поверхностей^{*}). Пусть световой луч γ_0 , описываемый уравнением $x^\mu = f^\mu(r, y_0^a)$, пересекает мировую линию наблюдателя в точке $x_1^\mu = f^\mu(r_1, y_0^a)$ и четырехмерная скорость наблюдателя в этот момент есть U_1^μ (рис. 54). С точки зрения наблюдателя множество Π_1 событий $x_1^\mu + dx^\mu$, одновременных этому событию, удовлетворяет условию

$$U_{1\mu} dx^\mu = 0. \quad (5.3.5)$$

Выберем аффинный параметр r так, чтобы в точках пересечения лучей пучка с Π_1 выполнялось условие $r = r_1$. Если потребовать, чтобы смещения dx^μ дополнительно удовлетворяли условию

$$l_\mu dx^\mu = 0, \quad (5.3.6)$$

то эти два условия совместно определяют двумерную площадку, перпендикулярную (в системе отсчета U_1^μ) пучку световых лучей. Пусть e_a^α ($a = 1, 2$) — единичные ортогональные друг к другу векторы, а $m^\alpha = 2^{-1/2}(e_1^\alpha + ie_2^\alpha)$. Тогда имеем

$$m^\alpha m_\alpha = \bar{m}^\alpha \bar{m}_\alpha = 0, \quad m^\alpha \bar{m}_\alpha = 1. \quad (5.3.7)$$

Предположим теперь, что на пути светового пучка расположен объект, причем так, что часть двумерной площадки, ограниченная кривой

$$\zeta^\alpha(\theta) \equiv x^\alpha(\theta) - x_1^\alpha = \zeta(\theta) \bar{m}^\alpha + \bar{\zeta}(\theta) m^\alpha, \quad (5.3.8)$$

оказывается непрозрачной для световых лучей. Тогда за площадкой возникнет область тени, граница которой определяется условием

$$x^\mu = f^\mu(r, y_0^a + \delta y^a(\theta)), \quad (5.3.9)$$

где $y_0^a + \delta y^a(\theta)$ — значение параметра y^a светового луча, проходящего через точку площадки $x^\alpha(\theta)$, а

$$f^\mu(r_1, y_0^a + \delta y^a(\theta)) = x_1^\mu + \zeta_1^\alpha(\theta). \quad (5.3.10)$$

Пусть световой луч γ_0 при продолжении в точке $x_2^\mu = f^\mu(r_2, y_0^a)$ пересекает мировую линию $\mathcal{Z}$ другого наблюдателя, четырехмерная скорость которого в этот момент равна U_2^μ (см. рис. 54). С точки зрения этого наблюдателя пространство Π_2 событий, одновременных с x_2^μ , растягивается векторами $dx^\mu = x^\mu - x_2^\mu$, удовлетворяющими соотношению $U_{2\mu} dx^\mu = 0$. Используем произвол ($r \rightarrow r' = A(y^a)(r - r_1) + r_1$) в выборе аффинного параметра, чтобы добиться выполнения равенства $r = r_2$ для всех световых лучей пучка в точках их пересечения с Π_2 . Нетрудно убедиться, что двумерная площадка $x^\mu = f^\mu(r_2, y_0^a + \delta y^a)$, описывающая положение фронта волны в момент x_2^μ в системе отсчета U_2^μ , ортогональна направлению светового луча. касательный вектор к которому $l_2^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial r}(r_2, y_0^a)$. Тем самым доказано, что все части тени одновременно достигают экрана, расположенного перпендикулярно пучку.

^{*}) Вопрос о конгруэнциях световых геодезических в искривленном пространстве-времени подробно освещен, например, в обзорах Пирани (1964) и Фролова (1976^a), где приведены также соответствующие ссылки.

Размер, форма и ориентация изображения на экране определяются однозначно, если известны скалярные произведения $\delta_1 x^\mu \cdot \delta_2 x_\mu$ для произвольной пары векторов, соединяющих точку x_2^μ с точками попадания на экран световых лучей с параметрами $y_0^a + \delta y_1^a$ и $y_0^a + \delta y_2^a$: $\delta_i x^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial y^a} (r_2, y_0^a) \delta y_i^a$. Нетрудно убедиться в том, что при переходе в другую систему отсчета U_2^μ векторы $\delta_i x^\mu$ преобразуются следующим образом: $\delta'_i x^\mu = \delta_i x^\mu + a_i l^\mu$, а значения скалярных произведений остаются неизменными:

$$\delta_1 x^\mu \cdot \delta_2 x_\mu = \delta'_1 x^\mu \cdot \delta'_2 x_\mu. \quad (5.3.11)$$

Тем самым показано, что размер, форма и ориентация тени не зависят от скорости движения наблюдателя.

Поскольку характеристики изображения на экране не зависят от выбора наблюдателя, возьмем, для удобства, в качестве U_2^μ вектор, получаемый из U_1^μ параллельным переносом вдоль γ_0 . Обозначим через m_2^μ результат такого переноса вектора m^μ . Поскольку при параллельном переносе сохраняется ортогональность m^μ векторам l^μ и U^μ , то m_2^μ и $\bar{m}_2^\mu$ растягивают двумерную площадку экрана, ортогонального световому пучку в системе отсчета U_2^μ . Определим вектор $\xi_1^\alpha(r) = \frac{\partial f^\alpha(r, y_0^a)}{\partial y^a} \delta y^a$, соединяющий точку

с аффинным параметром r луча γ_0 с точкой с тем же аффинным параметром на световом луче γ с параметрами $y_0^a + \delta y^a$. Используя выражение для $l^\alpha \left(l^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} \right)$ и свойство симметрии $\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial r \partial y^a} = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial y^a \partial r}$, имеем

$$l^\alpha \xi_{1;\alpha}^\beta - \xi_{1;\alpha}^\alpha l^\beta \equiv l^\alpha \xi_{1;\alpha}^\beta - \xi_{1;\alpha}^\alpha l^\beta = 0. \quad (5.3.12)$$

Вектор $\xi_1^\alpha(r_2) = (\xi + \delta \xi) \bar{m}_2^\alpha + (\bar{\xi} + \delta \bar{\xi}) m_2^\alpha$ отвечает точке попадания луча γ на экран. Обозначим $\xi^\alpha(r)$ вектор, получаемый в точке r в результате параллельного переноса вектора $\xi^\alpha = \xi_1^\alpha(r_1) = \xi \bar{m}^\alpha + \bar{\xi} m^\alpha$ вдоль γ_0 :

$$l^\alpha \xi_{;\alpha}^\beta = 0. \quad (5.3.13)$$

Поскольку в начальной точке r_1 векторы ξ_1^α и ξ^α совпадают, то для малых расстояний $\delta r = r_2 - r_1$ экрана от объекта находим

$$\xi_1^\alpha = (\delta^\alpha_\beta + l^\alpha_{;\beta} \delta r) \xi^\beta. \quad (5.3.14)$$

Умножая обе части этого равенства на m_α и обозначая

$$\rho = -l_{\alpha;\beta} m^\alpha \bar{m}^\beta, \quad \sigma = -l_{\alpha;\beta} m^\alpha m^\beta, \quad (5.3.15)$$

получаем

$$\delta \xi = -(\rho \xi + \sigma \bar{\xi}) \delta r. \quad (5.3.16)$$

Таким образом, отображение

$$\xi \rightarrow \xi' = \xi + \delta \xi = \xi(1 - \rho \delta r) - \bar{\xi} \delta r \quad (5.3.17)$$

устанавливает связь между формой предмета и формой тени.

Если в качестве предмета выбрать круг, граница которого $\zeta(\theta) = \exp(i\theta)$, то граница тени определяется соотношением

$$\zeta' = (1 - \rho \delta r) \exp(i\theta) - \sigma \delta r \exp(-i\theta), \quad (5.3.18)$$

описывающим эллипс с полуосями $a_{\pm} = [1 - (\rho + \bar{\rho} \mp |\sigma|) \delta r]$, площадь которого равна $\pi a_+ a_- = \pi [1 - (\rho + \bar{\rho}) \delta r]$, и, следовательно, фактор $\theta = -\operatorname{Re} \rho$ определяет увеличение линейного масштаба. Модуль сдвига $|\sigma|$ определяет степень сжатия круга и выражается через $a_+/a_- = 1 + 2|\sigma| \delta r$.

Величины ρ и $|\sigma|$, не зависящие от выбора векторов m^α и характеризующие расширение и сдвиг конгруэнции световых лучей, получили название *оптических скаляров*. Следует подчеркнуть, что инвариантами являются величины $\rho \delta r$ и $\sigma \delta r$, а ρ и σ при изменении аффинного параметра преобразуются линейным образом. Нетрудно убедиться, что если рассматриваемая световая поверхность $\varphi(x) = 0$ включена в семейство световых поверхностей $\varphi(x) = c$ и $l_\alpha = \partial_\alpha \varphi$, то

$$\rho = -\frac{1}{2} l^\alpha_{;\alpha}, |\sigma|^2 = \frac{1}{2} l_{\alpha;\beta} l^{\alpha;\beta} - \rho^2. \quad (5.3.19)$$

Следует подчеркнуть, что поскольку $l_{\alpha;\beta} = \varphi_{;\alpha;\beta} = l_{\beta;\alpha}$, то оптический скаляр ρ для конгруэнции световых лучей, образующих поверхность Γ , является действительной величиной: $\rho = \bar{\rho}$. Полученные выше соотношения завершают доказательство теоремы Элерса — Сакса.

Если обозначить площадь сечения узкого светового пучка через δA , то ее изменение описывается следующим уравнением, вытекающим из (5.3.18) при $\rho = \bar{\rho}$:

$$\frac{d}{dr} (\delta A)^{1/2} = -\rho (\delta A)^{1/2}. \quad (5.3.20)$$

При $\rho > 0$ площадь сечения пучка при увеличении аффинного параметра убывает.

Поведение оптических скаляров ρ и σ вдоль световых лучей описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Вывод этих уравнений основан на использовании тождества

$$l_{\mu;\alpha;\beta} = l_{\mu;\beta;\alpha} + R^\nu_{\mu\alpha\beta} l_\nu. \quad (5.3.21)$$

Умножая обе части этого соотношения на $l^\beta m^\mu \bar{m}^\alpha$, выбирая для удобства m^μ параллельно переносимым вдоль l^μ , учитывая условие геодезичности $l^\mu l^\alpha_{;\mu} = 0$ и соотношение $R_{\nu\beta} l^\nu l^\beta = 2R_{\nu\mu\alpha\beta} l^\nu l^\beta m^\mu \bar{m}^\alpha$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{d\rho}{dr} = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad (5.3.22)$$

где $\Phi = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta$. Аналогично выводится уравнение для σ :

$$\frac{d\sigma}{dr} = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad (5.3.23)$$

где $\Psi = C_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\alpha m^\beta l^\gamma m^\delta$; $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Вейля [см. (П. 4)] *).

* Оптические скаляры ρ и σ определяются соотношением (5.3.19) для произвольной световой геодезической конгруэнции; при этом соотношения (5.3.22) и (5.3.23)

Если предположить, что имеется пробный пучок, образованный световыми лучами, для которого в начальный момент выполнено условие $\rho = \sigma = 0$, то часть кривизны Φ (при $\Psi = 0$) действует как линза без астигматизма (σ остается равным нулю), в то время как часть кривизны Ψ (при $\Phi = 0$) действует как чисто астигматическая линза (ρ остается равным нулю).

Соотношение (5.3.22) позволяет доказать следующее важное утверждение.

Теорема о фокусировании. Пусть $\Phi \geq 0$ и в некоторой точке светового пучка $r = r_0$ выполняется неравенство $\rho \equiv \rho_0 > 0$; тогда на конечном расстоянии $r - r_0 \leq \rho_0^{-1}$ от этой точки пучок света достигает фокальной точки и площадь его сечения обращается в нуль.

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться следующим соотношением:

$$\frac{d^2}{dr^2} (\delta A)^{1/2} = -(\sigma\bar{\sigma} + \Phi)(\delta A)^{1/2}, \quad (5.3.24)$$

которое получается из (5.3.20) с помощью дифференцирования и уравнения (5.3.22). Поскольку правая часть этого соотношения неположительна, то при $r > r_0$ $d(\delta A)^{1/2}/dr \leq -\rho_0(\delta A)^{1/2}(r = r_0)$ и, следовательно, $(\delta A)^{1/2}$ обращается в нуль при значении параметра r , удовлетворяющем неравенству $0 < r - r_0 \leq \rho_0^{-1}$.

Если гравитационное поле описывается уравнениями Эйнштейна, то условие $\Phi \geq 0$ эквивалентно соотношению $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$. Это условие выполняется, в частности, если тензор энергии-импульса, описывающий распределение вещества и полей, удовлетворяет *слабому энергетическому условию* (см. Приложение), т.е. плотность энергии $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ в системе отсчета произвольного наблюдателя ($u^\mu u_\mu = -1$) неотрицательна. Для доказательства того, что $\Phi \geq 0$ вытекает из слабого энергетического условия, достаточно рассмотреть предельный случай, когда $\alpha(u)u^\mu \rightarrow l^\mu$.

Имеются основания считать, что при описании вещества и физических полей в рамках *классической теории* слабое энергетическое условие всегда выполняется. Это означает, что всякий поток энергии-импульса через световую поверхность оказывает фокусирующее действие на световые лучи.

§ 5.4. Теорема Хокинга. Принцип космической цензуры

Согласно теореме Пенроуза горизонт событий является световой поверхностью, образующие которой при продолжении их в будущее никогда не пересекаются между собой. Каустики на горизонте, отвечающие образованию новых пучков образующих ($\rho = -\infty$), могут возникать в результате падения внутрь черной дыры вещества, столкновения и слияния черных дыр и при воздействии на черную дыру поля от внешних источников. Эти особенности горизонта событий в сочетании с общими теоремами о световых поверхностях, доказанными ранее, позволяют вывести ряд важных утверждений относительно общих свойств черных дыр.

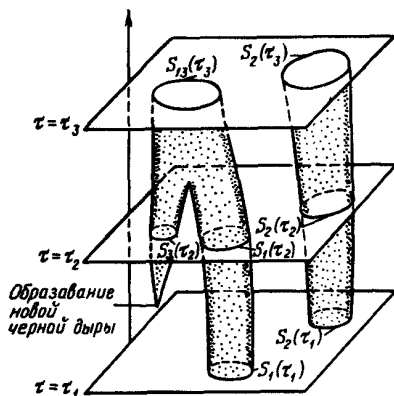
также оказываются выполненными. В случае, если l^μ являются касательными векторами к световой поверхности, то ρ удовлетворяет условию $\rho = \bar{\rho}$.

Рассмотрим бесконечно узкий пучок образующих горизонта событий. Пусть сечение этого пучка в точке с аффинным параметром r имеет площадь $\delta A(r)$. Отметим, что, согласно теореме Элерса – Сакса, величина $\delta A(r)$ не зависит от конкретного выбора локального наблюдателя, ее измеряющего, и поэтому имеет инвариантный смысл. Предположим, что в некоторой точке r_0 площадь сечения выбранного пучка начинает убывать, а тензор энергии-импульса, описывающий вещество и физические поля, окружающие черную дыру (и, возможно, падающие в нее), удовлетворяет слабому энергетическому условию. Тогда, по теореме о фокусировании, образующие горизонта событий, входящие в пучок, должны пересечься при конечном значении аффинного параметра. Чтобы согласовать этот результат с теоремой Пенроуза, приходится сделать вывод, что либо имеется физическая сингулярность на горизонте и образующие горизонта попадают в нее, прежде чем начнут пересекаться, либо неверно предположение, что площадь сечения пучка образующих может начать уменьшаться. Иными словами, предположение об отсутствии сингулярностей, на которые может натолкнуться горизонт событий, совместно со слабым энергетическим условием приводят к тому, что площадь сечения пучка образующих горизонта событий не убывает со временем. Хокинг (1971b, 1972a) доказал теорему, согласно которой площадь сечения пучка образующих не убывает со временем даже в том случае, если вместо предположения об отсутствии сингулярности на горизонте событий потребовать, что отсутствовали сингулярности, видимые с $\mathcal{I}^+$. Подобные (видимые с $\mathcal{I}^+$) сингулярности называют *голыми*. Условие отсутствия голых сингулярностей более строго формулируется как условие существования такой регулярной пространственноподобной поверхности Σ , что все причинные кривые, выходящие на $\mathcal{I}^+$ при продолжении их в прошлое, обязательно пересекают Σ . Существование такой поверхности гарантирует, что задание на ней начальных данных, полностью описывающих состояние частиц и полей однозначно определяет эволюцию системы в области, видимой с $\mathcal{I}^+$, а это эквивалентно отсутствию видимых с $\mathcal{I}^+$ сингулярностей. По терминологии Хокинга такие пространства называют *асимптотически предсказуемыми*.

Таким образом, если предположить, что отсутствуют сингулярности (либо на горизонте событий, либо вне его), то площадь сечения каждого пучка образующих горизонта событий не убывает со временем. С другой стороны, если на горизонте событий имеются каустики, где возникают новые пучки образующих, площадь сечения горизонта возрастает. Иными словами, сумма площадей $S_i(\tau)$ поверхностей черных дыр $\mathcal{B}_i(\tau)$ является неубывающей функцией "времени" τ . (Мы считаем, что $I^\mu \tau_{,\mu} < 0$, т.е. сечение горизонта событий в более поздний момент τ отвечает большему значению аффинного параметра вдоль каждой образующей.) Аналогичный вывод о неубывании площади поверхности справедлив и для отдельно взятой черной дыры $\mathcal{B}_i(\tau)$. Эти результаты составляют содержание теоремы, доказанной Хокингом (1971b, 1972a) (рис. 55).

Обсудим кратко те предположения, в рамках которых эта теорема доказана. Таких предположений два: 1) отсутствие голых сингулярностей и 2) выполнимость слабого энергетического условия. В настоящее время имеется гипотеза, высказанная Пенроузом (1969) и получившая название "принципа космической цензуры", согласно которой при физически разум-

Рис. 55. Возможные процессы с черными дырами (иллюстрация к теореме Хокинга). Плоскости τ_1, τ_2, τ_3 обозначают пространственные сечения в соответствующие моменты времени; $S_a(\tau_i)$ — площадь черной дыры a в момент времени τ_i . Две черные дыры могут сливаться в одну, черные дыры могут возникать. Площадь поверхности одиночной черной дыры не убывает со временем. Теорема Хокинга утверждает, что общая площадь поверхностей черных дыр в момент времени τ является неубывающей функцией времени



ных предположениях относительно свойств вещества и полей голая (т.е. видимая удаленным наблюдателем) сингулярность не может образоваться в результате эволюции системы из регулярного начального состояния*). Другими словами, сингулярности, возможно, возникающие при эволюции таких систем, всегда оказываются скрытыми от отдаленного наблюдателя горизонтом событий.

В настоящее время доказательство этого принципа отсутствует. Трудности возникают уже при попытке более точного описания того, что следует понимать под сингулярностью**). Нетрудно привести примеры, когда при сферическом коллапсе вещества (пыли или жидкости) в результате неомологии движения его слоев, вне горизонты событий образуются особые поверхности, на которых плотность вещества обращается в бесконечность [Йодзис и др. (1973, 1974), Кристоудулу (1984)]. Возможно также появление бесконечной кривизны в случаях, когда сжатие звезды сопровождается излучением, уносящим ее массу, причем полное "выгорание" звезды происходит в момент ее сжатия в точку, а на всем этапе предыдущего сжатия ее поверхность находится вне гравитационного радиуса [горизонт событий в этом случае не образуется — Стейнмюллер и др. (1975), Лэйк, Хеллаби (1981), Курода (1984b)].

Подобные примеры, хотя формально и противоречат принципу космической цензуры, выглядят довольно искусственными. С другой стороны, численные расчеты коллапса звезд и анализ малых отклонений от сферической симметрии при коллапсе указывают на то, что в реальных физических условиях голые сингулярности действительно не возникают. Строгое доказательство принципа космической цензуры (а также точная формулировка условий, при которых он выполняется) является одной из важных

*) Иногда принцип космической цензуры в такой формулировке называют "слабым", чтобы отличить его от "сильного". Этот принцип, предложенный Пенроузом (1978), состоит в утверждении, что сингулярности, возникающие в результате гравитационного коллапса, в общем случае являются пространственноподобными и любой наблюдатель не может их увидеть до тех пор, пока не упадет в них.

**) Обсуждение вопроса о сингулярностях и ссылки на соответствующие работы см. § 5.6.

нерешенных задач физики черных дыр [см. обзор Израэля (1984), ссылки в нем, а также Кадерни, Кальвани (1979), Кальвани (1980), Гласс, Харпаз (1981), Янг (1979), Лэйк (1979), Израэль (1985)].

Что касается слабого энергетического условия, то необходимо подчеркнуть следующее: хотя при рассмотрении взаимодействий черной дыры с веществом и полями в рамках классической теории это условие, по-видимому, выполняется, учет квантовых эффектов может привести (и действительно приводит) к его нарушению^{*}). Поэтому теорема Хокинга о возрастании площади поверхности черной дыры непосредственно применима лишь к процессам, при описании которых квантовыми эффектами можно пренебречь.

§ 5.5. Ловушечные поверхности, горизонты видимости, R - и T -области

Границей черной дыры является горизонт событий H^+ . На первый взгляд определение черной дыры, как области внутри горизонта событий, вполне естественно. Однако, если рассмотреть процессы, которые могут происходить при возникновении черной дыры или в течение ее последующей эволюции, то станет ясным, что это определение в действительности описывает несколько не то, что вначале предполагалось.

В самом деле, представим себе, что в сферическую черную дыру массы M спустя некоторое время после ее образования падает сферическая оболочка массы ΔM (рис. 56). Казалось бы, до падения массы границей черной дыры был гравитационный радиус $r_{g,1} = 2M$, а после падения граница расширится и будет $r_{g,2} = 2(M + \Delta M)$. В действительности утверждение, что до падения ΔM границей черной дыры была поверхность $r_{g,1}$, неправильно. Ведь после падения ΔM внутрь сферы радиуса $r_{g,1}$ нулевые геодезические, шедшие вдоль $r_{g,1}$, под действием возросшего тяготения станут сходить и уйдут в сингулярность (см. рис. 56). Эти геодезические не являются границей области, откуда лучи не уходят в бесконечность. Область эта шире, ее границей являются лучи A , показанные на рисунке. До падения массы ΔM они шли снаружи от $r_{g,1}$ и, удаляясь, несколько расходились. Если бы ΔM не упала, они бы ушли на бесконечность $\mathcal{I}^+$. Но падение ΔM устраняет их расходимость, заставляя идти вдоль $r_{g,2}$.

Таким образом, граница черной дыры H^+ определяется не только какими-то особенностями пространства-времени в данный момент (скажем, сильное поле в какой-то области), но и всей будущей историей (упадет ли масса ΔM или не упадет и т.д.). Задача нахождения горизонта событий H^+ является задачей с конечными, а не с начальными условиями.

Еще более разительна следующая ситуация. Вспомним процесс возникновения сферической черной дыры (рис. 57). Мы знаем, что H^+ (и, стало быть, черная дыра) возникает в момент τ_0 , до того как звезда сожмется до гравитационного радиуса (до τ_1). Но представим себе, что в момент между τ_0 и τ_1 звезда взорвется и ее вещество разлетится в бесконечность,

^{*}) Впервые на возможность нарушения теоремы Хокинга при квантовом рождении частиц в поле черной дыры обратил внимание Марков (1974).

Рис. 56. Нестатическая сферически-симметричная черная дыра

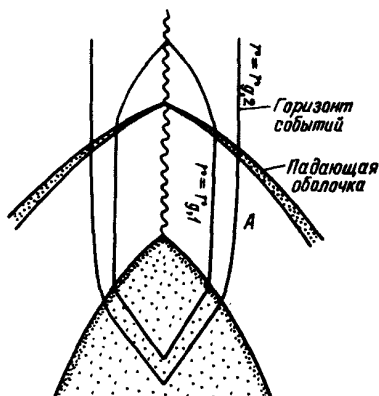
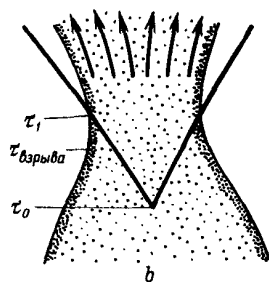
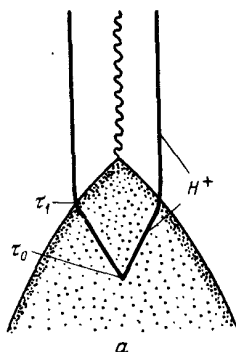


Рис. 57. Положение горизонта событий в данный момент времени зависит от всей последующей эволюции системы. При сферическом коллапсе, приводящем к образованию черной дыры (а), горизонт событий образуется в момент времени τ_0 . Взрыв коллапсирующей звезды, происходящий после τ_0 , может привести к тому, что горизонт событий не образуется вовсе (б)



т.е. черная дыра вообще не образуется (рис. 57b)!*). Конечно, говорить, что черная дыра существовала в период от τ_1 до взрыва, было бы неверно, ибо горизонта H^+ в этом примере вообще не существует.

Итак, граница H^+ ограничивает не столько область с особо сильным полем тяготения (хотя, конечно, сильное поле необходимо, иначе H^+ не возникнет), сколько область, обладающую свойствами, особыми глобально, а именно — из этой области лучи не уходят в бесконечность. Именно это свойство — невидимость из бесконечности, невозможность выбраться из нее частицам и лучам света — и служит основанием назвать эту область черной дырой. Кроме того, горизонт событий образован нулевыми геодезическими, для них можно сформулировать ряд сильных теорем (часть из них приведена выше) — это еще одна причина для выбора H^+ в качестве определения границы черной дыры.

Но возникает вопрос: существуют ли внутри черной дыры какие-либо свойства пространства-времени, которые в данный момент времени (т.е. на данном пространственном сечении) качественно отличались бы от свойств

*) Заметим, что взрыв, после того как звезда сжалась до r_g (после τ_1), не может заставить вещество разлетаться в бесконечность. Из-под $r = r_g$ ничто не может выйти наружу.

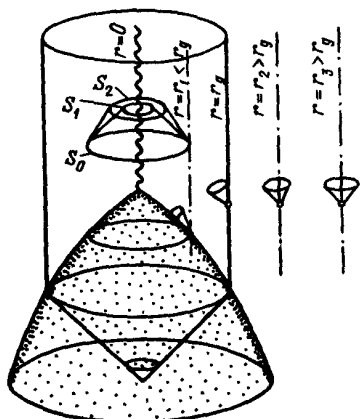


Рис. 58. Положение локальных световых конусов снаружи и внутри черной дыры. Поверхности внутреннего (S_1) и внешнего (S_2) фронтов излучения, испущенного нормально к двумерной поверхности S_0 внутри черной дыры, имеют площади, меньшие, чем площадь S_0 .

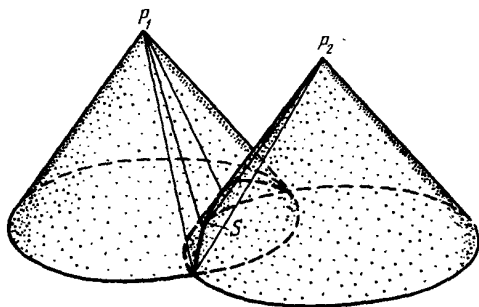


Рис. 59. Пример некомпактной двумерной поверхности в пространстве Минковского, для которой оба ортогонально выходящих семейства световых лучей являются сходящимися. Такая поверхность S не является ловушечной

области вне черной дыры и тем самым позволяли сказать, что черная дыра существует в данный момент — без обращения к изучению всей бесконечной будущей истории мира? Мы сейчас увидим, что такие особые свойства, вообще говоря, существуют.

Как уже отмечалось при описании сферического коллапса, о попадании коллапсирующего тела внутрь черной дыры можно судить по результатам следующего мысленного эксперимента. Пусть поверхность коллапсирующего тела в определенный момент вспыхивает. Если тело прозрачно, то через малый промежуток времени снаружи и внутри него имеются две поверхности, отвечающие положению фронта внешней и внутренней световой волны. Для ситуации внутри черной дыры характерно то, что площадь поверхности как внутреннего, так и внешнего фронта убывает со временем, а световые лучи, им ортогональные, сближаются. Поле тяготения внутри черной дыры настолько сильно, что заставляет даже лучи, вышедшие наружу от коллапсирующего тела, падать к центру (положение световых конусов внутри черной дыры показано на рис. 58).

В общем случае подобные замкнутые ориентируемые гладкие двумерные пространственноподобные поверхности, для которых оба семейства ортогональных к ним световых геодезических сходятся ($\rho > 0$), называют *ловушечными поверхностями*. Наличие ловушечной поверхности свидетельствует о том, что гравитационное поле в области, где проходит поверхность, очень сильное. В асимптотически плоских пространствах (с асимптотически предсказуемым будущим) *) ловушечную поверхность нельзя увидеть с

*) При доказательстве строгих результатов о свойствах черных дыр обычно приходится делать те или иные предположения о глобальных свойствах пространства-вре-

$\mathcal{J}^+$, если только не нарушается слабое энергетическое условие [Хокинг, Эллис (1973)]. Иными словами, ловушечные поверхности лежат внутри черных дыр, и их существование свидетельствует о возникновении черной дыры.

Таким образом, наличие ловушечной поверхности есть условие, достаточное для существования черной дыры в данный момент времени. Мы увидим далее, что это условие не является необходимым. Следует отметить, что в определении ловушечной поверхности весьма существенно требование ее замкнутости. Такая поверхность, окружающая центр тяготения, сжимается под его действием, образно говоря, столь стремительно, что это приводит к указанной особенности (сходимости) даже для лучей света, выходящих наружу от нее. Если же не требовать замкнутости, то остальные свойства ловушечной поверхности можно реализовать даже без всякого тяготения в плоском мире Минковского. Так, пересечение двух световых конусов прошлого для точек p_1 и p_2 в пространстве-времени Минковского (рис. 59) дает двумерную пространственноподобную поверхность S с требуемыми свойствами, которая, однако, не является замкнутой.

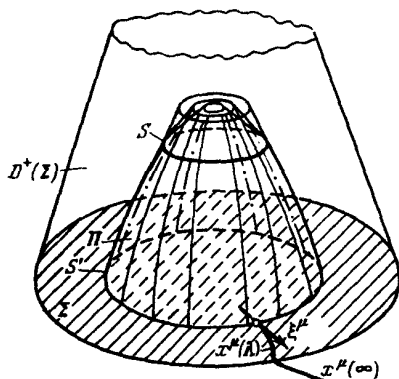
Для решения многих вопросов, связанных с распространением сигналов в поле черных дыр, оказывается достаточным проследить за поведением выходящего излучения. Поэтому оказывается удобным следующее определение: *внешней ловушечной поверхностью* называют компактную ориентируемую пространственноподобную поверхность, обладающую тем свойством, что расхожимость выходящих ортогонально к ней световых геодезических неотрицательна ($\rho \geq 0$). Это определение подразумевает, что имеется возможность инвариантным образом определить, какое из двух семейств ортогональных поверхности S световых лучей является выходящим.

Пусть рассматриваемая ловушечная поверхность S возникает в результате эволюции системы, начальные данные для которой заданы на поверхности Коши Σ (рис. 60). Предположим для простоты, что Σ имеет топологию R^3 . Рассмотрим произвольную конгруэнцию гладких временноподобных линий (существование таких конгруэнций можно гарантировать по крайней мере в области Коши будущего $D^+(\Sigma)$ поверхности Σ^*) [Хокинг, Эллис

ни, которые являются разумными с точки зрения физики и играют важную "техническую" роль при доказательстве теорем, позволяя не рассматривать различные "патологические" возможности. Такого рода предположения обычно подробно перечисляются при обсуждении соответствующих теорем [см. Хокинг, Эллис (1973)]. Мы старались по возможности ограничить использование многочисленных терминов, применяемых для обозначения этих свойств. Отметим здесь лишь, что частичная поверхность Коши — это такая пространственноподобная поверхность, которую каждая причинная кривая пересекает не более одного раза. *Пространством с асимптотически сильно предсказуемым будущим* называют пространство, в котором имеется такая частичная поверхность Коши, что задание на ней начальных данных позволяет делать предсказания не только о "внешности" черной дыры, но и о некоторой окрестности горизонта событий. Мы используем также понятие *регулярно предсказуемого пространства*. Таким называют пространство, если его будущее асимптотически сильно предсказуемо, а соответствующая частичная поверхность Коши Σ обладает свойствами: 1) пересечение Σ с $\mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+)$ содержится в $\mathcal{J}^+(\mathcal{J}^-)$ и гомеоморфно R^3 с вырезанным из него открытым множеством с компактным замыканием и 2) поверхность Σ односвязна.

* Область $D^+(\Sigma)$ Коши будущего множества Σ определяется как множество всех таких точек p , для которых каждая непродолжаемая в прошлое причинная кривая, проходящая через p , пересекает Σ .

Рис. 60. Иллюстрация к определению внешней ловушечной поверхности



(1973)]. Отдельные кривые конгруэнции можно рассматривать как мировые линии локальных наблюдателей. Если проследить в прошлое за линиями конгруэнции, проходящими через поверхность S , то точки пересечений этих линий с поверхностью Коши Σ , определяют на ней замкнутую ориентируемую поверхность S' . Для этой поверхности уже не представляет труда определить направление наружу. Например, можно рассмотреть любую гладкую кривую $x^\mu(\lambda)$, начинающуюся на S' ($x^\mu(0) \in S'$) и выходящую на пространственную бесконечность. Тогда вектор $\xi^\mu = dx^\mu/d\lambda$ при $\lambda = 0$ определяет направление наружу в точке $x^\mu(0)$. Поскольку поверхность Π , образованная линиями конгруэнции, проходящими через S , является ориентируемой, то задание в одной ее точке внешнего направления ξ^μ определяет внешнее направление в каждой из ее точек и, в частности, для точек исходной поверхности S . Подобное определение является инвариантным, и его можно обобщить на случай асимптотически предсказуемых пространств [Хокинг, Эллис (1973)].

Будем говорить, что точка p лежит в ловушечной области (сокращенно T_- -области), если существует внешняя ловушечная поверхность, проходящая через эту точку. В важном частном случае сферически-симметричных пространств точка p принадлежит ловушечной области, если выполнено условие $(\nabla r \cdot \nabla r)_p \leq 0$.

На рис. 61а показано расположение T_- -области для простейшего случая коллапса сферического облака пыли без какого-либо последующего падения вещества в черную дыру. Ввиду важности этого понятия то же пространство-время еще раз изображено на рис. 61б в координатах Леметра. Внутри пылевого шара метрику можно записать в виде

$$ds^2 = -d\tau^2 + \left[\frac{3}{2} (r_g - \tau) \right]^{4/3} r_g^{-4/3} (dR^2 + R^2 d\omega^2); \quad (5.5.1)$$

при этом границе шара соответствует $R = r_g$. Вне шара, в пустоте, метрика выглядит следующим образом:

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{dR^2}{\left(\frac{3}{2} \frac{R - \tau}{r_g} \right)^{2/3}} + \left[\frac{3}{2} (R - \tau) \right]^{4/3} r_g^{2/3} d\omega^2. \quad (5.5.2)$$

Граница T_- -области в веществе описывается уравнением

$$\tau + \frac{2}{3} r_g \left(\frac{R}{r_g} \right)^3 = r_g. \quad (5.5.3)$$

Эта граница пространственноподобна. Вне вещества, в вакууме, граница T_- -области есть r_g :

$$\frac{3}{2} (R - \tau) = r_g. \quad (5.5.4)$$

Эта граница светоподобна.

Внешнюю часть $\partial T_i(\tau)$ связной компоненты $T_i(\tau)$ пересечения ловушечной области с пространственноподобной поверхностью $\tau(x) = \text{const}$ называют *горизонтом видимости*. Горизонт видимости $\partial T_i(\tau)$ является двумерной поверхностью, для которой выходящие ортогональные световые геодезические имеют нулевую расходимость ($\rho = 0$). При выполнении слабого энергетического условия горизонт видимости совпадает с горизонтом событий или лежит внутри него (рис. 62). В стационарных черных дырах горизонт видимости совпадает с горизонтом событий (это, в част-

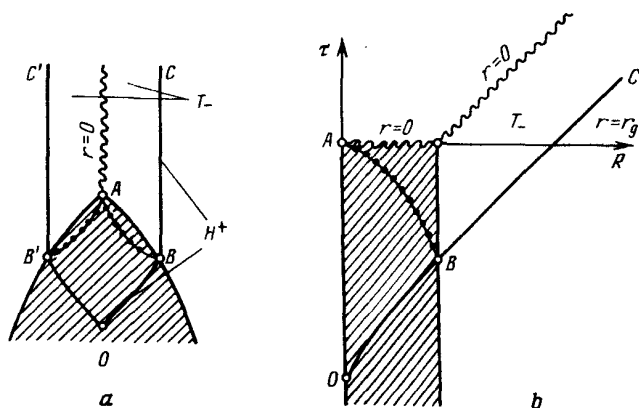


Рис. 61. *a* Расположение T -области для случая коллапса сферического облака пыли; *b* это же пространство-время в координатах Леметра

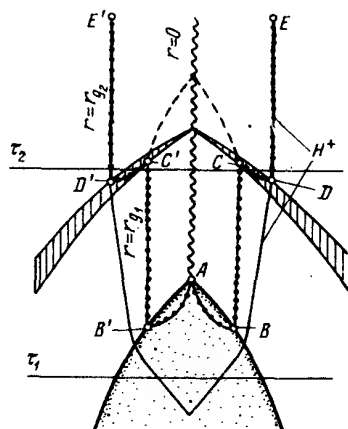


Рис. 62. Аккреция вещества на сферическую черную дыру

ности, имеет место для стационарной сферически-симметричной черной дыры; см. рис. 61).

В общем случае лучи, выходящие ортогонально горизонту видимости $\partial T(\tau)$, обладают нулевой расходимостью. В силу уравнения (5.3.22) условие $\rho = 0$ сохраняется вдоль этих лучей до тех пор, пока они не пересекают область, где $\Phi > 0$ или $\sigma \neq 0$. В этой области ρ становится положительным и, следовательно, световые лучи покидают горизонт видимости, уходя в ловушечную область. Иными словами, внешняя граница T_- -области является световой поверхностью в области, где $\sigma = 0$, $\Phi = 0$, и становится пространственноподобной поверхностью в области, где $\sigma \neq 0$ и (или) $\Phi > 0$ (см. рис. 61). При выполнении слабого энергетического условия вне горизонта видимости всегда имеется горизонт событий. Подчеркнем, однако, что внутри горизонта событий может, вообще говоря, и не быть внешних ловушечных поверхностей. С другой стороны, внутри одной черной дыры может находиться несколько связанных компонент ловушечной области. Сказанное проиллюстрировано на рис. 62, где изображена сферически-симметричная черная дыра, которая некоторое время нестационарна из-за падения в нее вещества. Внутри границы $ABCDE$ (соответственно $AB'C'D'E'$), обозначенной точечным пунктиром, лежит T_- -область. Внешняя граница каждой связанной компоненты T_- -области в сечении $\tau = \text{const}$ является горизонтом видимости. В сечении $\tau = \tau_1 = \text{const}$ внутри черной дыры (внутри H^+) нет T_- -области (нет ловушечных поверхностей). Тем самым доказывается, что наличие ловушечных поверхностей внутри черной дыры в сечении $\tau = \text{const}$ не есть необходимое условие существования горизонта событий. В сечении $\tau = \tau_2 = \text{const}$ имеются две связанные области T_- ; при этом внутренний горизонт видимости есть $r = r_{g_1}$, а внешний — $r = r_{g_2}$. Подобная ситуация с образованием нескольких связанных компонент T_- -областей может возникнуть, например, при слиянии двух черных дыр.

В дальнейшем окажется полезным также следующее определение: замкнутая ориентируемая гладкая двумерная пространственноподобная поверхность называется *антиловушечной* (T_+ -область), если оба семейства ортогональных к ней световых геодезических расходятся ($\rho < 0$). Появление T_+ -областей характерно для случаев, когда имеются белые дыры (см. гл. 13). Область пространства-времени, лежащую вне T_+ - и T_- -областей, будем называть R -областью.

§ 5.6. Теоремы о сингулярности внутри черных дыр

При анализе сферического коллапса было отмечено, что по крайней мере в рамках общей теории относительности он неизбежно приводит к возникновению сингулярности. В процессе коллапса растут инварианты, характеризующие кривизну пространства-времени, и через конечное время по часам на коллапсирующем теле в его центре кривизна неограниченно вырастает. Это происходит, когда граница T_- -области пересекает линию $r = 0$. Дальнейшее продолжение мировых линий частиц и лучей света, "достигших" образовавшейся сингулярности, оказывается невозможным, и поэтому неполнота пространства, связанная с обрыванием световых лучей и мировых линий на сингулярности при конечном значении аффинного параметра, является принципиально неустранимой.

При описании коллапса шара из пылевидного вещества в рамках обычной ньютоновской теории гравитации также возможна ситуация, когда плотность вещества и приливные силы неограниченно растут. Существенно, однако, что учет сил давления или малых отклонений от сферической симметрии принципиально изменяет ситуацию так, что максимальные значения плотности вещества и приливных сил (которые в ньютоновской теории аналогичны кривизне пространства-времени) становятся ограниченными. Таким образом, сингулярность в ньютоновской теории вырождена, неустойчива в том смысле, что возникает лишь в крайне специальной ситуации. Достаточно малых возмущений, и сингулярность исчезает.

О том, что ситуация в общей теории относительности существенно иная и развитие сингулярности внутри черных дыр неизбежно происходит при достаточно общих условиях, свидетельствует ряд строгих теорем.

Если предположить, что выполняется слабое энергетическое условие и возникла ловушечная поверхность (это означает, что имеется черная дыра), то площади поверхности фронта выходящего и входящего излучения уменьшаются. С другой стороны, поскольку скорость движения вещества не превосходит скорости света, между этими уменьшающимися поверхностями все время будет находиться то вещество, которое когда-либо попадало в эту область. Оно будет сжиматься, а его плотность возрастет. При этих условиях естественно ожидать возникновения сингулярности или какой-либо иной "неприятности".

О каких "неприятностях" может идти речь? Дело в том, что до сих пор под сингулярностью мы понимали бесконечную кривизну пространства-времени. Подобную бесконечность заведомо следует называть физической сингулярностью, ибо если какая-либо мировая линия частицы упирается в эту бесконечность, то, далее, линия принципиально не может быть продолжена. Существование частицы здесь обрывается. Однако этим особенности пространства-времени, которые следует называть сингулярностью, не исчерпываются, что связано с возможностью сложной топологии пространства-времени и индефинитностью его метрики. Рассмотрим, например, такую ситуацию. Пусть в некотором месте пространства-времени имеется бесконечная кривизна — сингулярность. Вырежем из пространства-времени эту сингулярность вместе с некоторой окрестностью. В оставшемся многообразии нет бесконечной кривизны. Следует ли оставшееся многообразие считать не имеющим сингулярности? Такое заключение было бы, конечно, неверным. Дело в том, что мировые линии, которые ранее упирались в бесконечную кривизну, теперь обрываются на границе вырезанной области. Это тоже физическая особенность, которую следует назвать сингулярностью. Принято называть сингулярностью не только бесконечную кривизну, но и любую конечную точку на мировой линии частицы (или фотона) или на времениподобной геодезической, если за эту точку нельзя в принципе продолжить эту линию. При этом конечная точка — сингулярность — должна лежать на конечном расстоянии или при конечном значении аффинного параметра для нулевой геодезической. Таким образом, в более общем случае сингулярность определяется как неполнота мировых линий в пространстве-времени [подробнее об этом см. Героч (1968); Шмидт (1971), Героч и др. (1972), Хокинг, Эллис (1973), Кларк (1973, 1975, 1976), Героч и др. (1982), Типлер и др. (1980)].

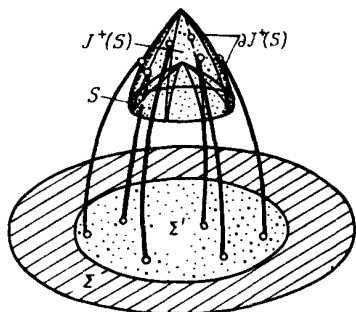


Рис. 63. Иллюстрация к доказательству теоремы Пенроуза о сингулярности внутри черной дыры

После данных разъяснений вернемся к обсуждению проблемы о неизбежности возникновения сингулярности внутри ловушечных поверхностей. Соответствующая теорема, доказанная Пенроузом (1965а), гласит:

Пусть выполнено слабое энергетическое условие и в пространстве-времени, допускающем некомпактную поверхность Коши Σ , имеется ловушечная поверхность S . Тогда такое пространство-время не может быть полным относительно световых геодезических. Иными словами, в таком пространстве найдется по крайней мере один световой луч, который нельзя продолжить и который обрывается при конечном значении аффинного параметра. А значит, имеется сингулярность согласно данному выше определению.

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Рассматривается множество $J^+(S)$ точек, которые соединимы с S причинной кривой, направленной в прошлое (рис. 63). Локальный анализ показывает, что там, где граница $\partial J^+(S)$ этого множества несингулярна, она светоподобна и образована отрезками световых геодезических, ортогонально пересекающих S в своих начальных точках. Если световые образующие $\partial J^+(S)$ имеют конечные точки, то эти точки совпадают с особенностями $\partial J^+(S)$ (каустиками или пересечениями). Далее, используя слабое энергетическое условие и сходимости образующих $\partial J^+(S)$ на поверхности S , можно доказать, что каждый из световых лучей, испущенных ортогонально S , обязательно выходит на каустику, причем это происходит при значении аффинного параметра, не превосходящем ρ_S^{-1} , где ρ_S — максимальное значение ρ на S для обоих семейств выходящих лучей. (Существование ρ_S гарантируется гладкостью и компактностью поверхности S .) Отсюда следует, что граница $\partial J^+(S)$ компактна, поскольку она образована компактной системой конечных замкнутых отрезков. Можно доказать, что $\partial J^+(S)$ является трехмерным многообразием без края. Заметим, что при доказательстве компактности $\partial J^+(S)$ существенно использовалось предположение, что пространство-время является полным относительно световых геодезических, так что не происходит обрыва образующих $\partial J^+(S)$ до выхода на каустику или точку пересечения.

Следующий этап доказательства состоит в установлении противоречия компактности $\partial J^+(S)$ и некомпактности поверхности Коши Σ , после чего становится очевидным, что сделанное предположение о полноте пространства-времени несовместно с остальными условиями теоремы.

Искомое противоречие устанавливается следующим образом. Можно показать, что в пространстве-времени с поверхностью Коши существует конгруэнция времениподобных кривых. Поскольку через каждую точку пространства проходит одна и только одна кривая конгруэнции и времениподобная кривая не может пересечь световую поверхность $\partial J^+(S)$ более одного раза, то с помощью этой конгруэнции можно установить взаимно однозначное непрерывное соответствие между $\partial J^+(S)$ и некоторым замкнутым подмножеством Σ' поверхности Σ . Σ' не может совпасть с Σ , поскольку, по предположению, Σ некомпактна. Следовательно, Σ' имеет границу в Σ , но это противоречит тому, что $\partial J^+(S)$ — многообразие без края. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Пенроуза о сингулярности.

Следует подчеркнуть, что условие некомпактности поверхности Коши Σ использовалось лишь при доказательстве того, что Σ' не совпадает с Σ . Вместо этого можно было бы потребовать, что хотя бы одна времениподобная линия из конгруэнции не пересекала бы $\partial J^+(S)$.

Мы приведем здесь формулировку еще одной теоремы о сингулярностях (которая в определенном смысле является самой сильной из набора теорем такого рода), отсылая читателя, интересующегося точными формулировками, к работам Пенроуза (1968, 1979), Хокинга, Эллиса (1973), Мизнера, Торна, Уилера (1973), Уолда (1984), Типлера и др. (1980).

Теорема Хокинга—Пенроуза [Хокинг, Пенроуз (1970)]. Пространство-время M с необходимостью содержит неполные времениподобные или световые геодезические, которые невозможно продолжить, если выполнены следующие условия: 1) в пространстве-времени отсутствуют замкнутые времениподобные кривые; 2) для произвольного единичного времениподобного вектора u^μ выполняется неравенство $R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \geq 0$; 3) для каждой времениподобной или световой геодезической s с касательным вектором u^μ существует точка, в которой $u_{[\alpha} R_{\beta]\gamma\delta} [\epsilon u_\rho] u^\gamma u^\delta \neq 0$; 4) существует ловушечная поверхность.

Все эти условия представляют достаточно разумными и общими. Требование 1 отвечает нашему обычному представлению о причинности*). Условие 2 означает, что в любой физической системе отсчета плотность энергии ϵ неотрицательна и $\epsilon + 3p \geq 0$. Требование 3 эквивалентно тому, что рассматривается пространство-время общего вида, не обладающее какими-либо специальными симметриями. Условие 4, как уже отмечалось, тесным образом связано с существованием черной дыры. Теорема Пенроуза—Хокинга гарантирует возникновение сингулярности и в том случае, когда ловушечная поверхность возникает, например, в замкнутой Вселенной, где некомпактная поверхность Коши отсутствует, и поэтому теорема Пенроуза неприменима.

) Следует подчеркнуть, что наличие замкнутых времениподобных линий не противоречит принципу причинности в широком смысле. На замкнутой линии времени нельзя отделить будущее от прошлого, однако это само по себе еще не ведет ни к каким противоречиям [см. Зельдович, Новиков (1975)]. События на такой линии все "согласованы" друг с другом. Нельзя, как иногда говорят, изменить прошлое, зная будущее, так как все события вдоль линии времени уже, так сказать, "имеют место", их нельзя менять, они есть часть 4-мерного пространства-времени. Можно сказать и иначе: при наличии замкнутых линий времени неправильно говорить о влиянии будущего на прошлое, ибо эти понятия теряют смысл.

СТАЦИОНАРНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

§ 6.1. "Черные дыры не имеют волос"

Световой характер горизонта событий, ограничивающего черную дыру, приводит к тому, что он выполняет роль односторонней мембраны. Частицы и излучение могут пересечь горизонт событий извне и попасть внутрь черной дыры, однако выход частиц и излучения наружу запрещен. Поэтому для процессов с участием черных дыр характерна существенная необратимость. В частности, черная дыра, предоставленная самой себе, с течением времени становится стационарной. Стандартные рассуждения, приводящие к этому выводу, сводятся к следующему. Пусть в процессе коллапса образуется черная дыра и возникшая конфигурация полей и частиц вне ее не является равновесной. Тогда конфигурация начнет перестраиваться. Этот процесс сопровождается излучением энергии на бесконечность и внутрь черной дыры. Поскольку поля и частицы вне черной дыры имели первоначально конечную энергию, а энергия, излученная на бесконечность или поглощенная черной дырой, ничем не компенсируется, то можно ожидать, что со временем этот процесс прекращается и черная дыра становится стационарной, т.е. геометрия пространства-времени вне ее все меньше отличается от стационарного пространства, допускающего векторное поле Киллинга $\xi^\mu_{(t)}$. Этот вывод в случае образования черной дыры при коллапсе с малыми отклонениями от сферической симметрии подтверждается результатами, приведенными в гл. 3. Об этом свидетельствуют также теоремы об устойчивости стационарных черных дыр относительно малых возмущений [см. гл. 3, а также Прайс (1972a, b), Уолд (1979a, 1980)] и доказанное в работах Чандрасекара, Детвилера (1975a), Детвилера (1977, 1979) и Чандрасекара (1983) свойство отсутствия собственных мод колебания гравитационного поля с чисто действительной частотой (без затухания) в пространстве-времени стационарной черной дыры (см. также гл. 3, 4).

Нетрудно убедиться, что условие равновесия данного физического поля вблизи поверхности стационарной черной дыры налагает жесткие ограничения на допустимые конфигурации этих полей [Израэль (1971)]. Рассмотрим, для простоты, случай невращающейся черной дыры, описываемой метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = -\Phi dt^2 + \frac{dr^2}{\Phi} + r^2 d\omega^2, \quad \Phi = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (6.1.1)$$

Пусть $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса, описывающий физическое поле или среду вблизи этой черной дыры. Равновесие в такой системе возможно, если "вес" поля или среды в каждом элементе объема в точности компен-

сируется "выталкивающей силой", обусловленной действием компонент тензора энергии-импульса, описывающих натяжение, на поверхность, ограничивающую выбранный объем. В локальном пределе этот своеобразный "закон Архимеда" сводится к уравнению (закону сохранения)

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0, \quad (6.1.2)$$

дополненному условиями статичности

$$\partial_t T^{\mu\nu} = 0 \quad (6.1.3)$$

и отсутствия потоков

$$T^{rt} = T^{t\theta} = T^{t\varphi} = 0. \quad (6.1.4)$$

При этих условиях уравнение (6.1.2) при $\mu = t$ выполняется тождественно, а при $\mu = r$ приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial_r \Phi}{\Phi} (T_t^t - T_r^r) = \\ & = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 T_r^r) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta T_r^{\theta}) + \partial_{\varphi} (T_r^{\varphi}) - \frac{1}{r} (T_{\theta}^{\theta} + T_{\varphi}^{\varphi}). \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Нетрудно убедиться (переходя, например, к координатам $v = t + r^* = t + r + 2M \ln |r - 2M|$, r , θ , φ , регулярным на горизонте H^+), что в окрестности $r = 2M$ компоненты тензора $T^{\mu\nu}$, удовлетворяющего условию (6.1.3) и регулярного на H^+ , имеют следующее поведение в координатах t , r , θ , φ :

$$T_t^t \sim T_r^r \sim T_r^{\theta} \sim T_r^{\varphi} \sim T_{\theta}^{\theta} \sim T_{\varphi}^{\varphi} \sim O(1). \quad (6.1.6)$$

Поскольку все члены в правой части (6.1.5) конечны при $r = 2M$, то в окрестности горизонта должно выполняться условие $T_t^t \approx T_r^r$ *). Только при выполнении этого условия рассматриваемая конфигурация статична. Что же происходит, если оно нарушается? В этом случае обязательно отлична от нуля компонента T_r^t , так что возникает поток энергии поля через горизонт, который продолжается до тех пор, пока поле, перестроившись, не достигает возможного равновесия. Характерное время этого процесса имеет порядок $t \sim r_g/c$.

Подытожив результаты многочисленных работ, посвященных возможным конечным состояниям черных дыр, Уилер сформулировал утверждение, состоящее в том, что уединенная черная дыра при переходе в стационарное состояние избавляется в процессе излучения от всех тех характеристик, от которых можно избавиться путем излучения. Поскольку для безмассового бозонного поля спина s возможно излучение, связанное с изменением мультипольного момента l системы при $l \geq s$, то, согласно предположению Уилера, стационарная черная дыра, возникающая в результате коллапса нейтрального вещества, обладающего только гравитационным взаимодействием ($s = 2$), описывается метрикой, содержащей лишь два

*) Можно показать, что условие $T_t^t = T_r^r$ является необходимым и достаточным для выполнения теоремы Биркгофа, гарантирующей статичность сферически-симметричных решений. Это условие, очевидно, выполнено в пространствах Рейсснера-Нордстрема и де Ситтера.

свободных параметра: масса M ($l = 0$) и угловой момент J ($l = 1$). Если коллапсирующее вещество обладало электрическим зарядом, то возникающая стационарная метрика однозначно определяется заданием трех параметров: M, J и Q (электрический заряд)*).

Уединенная стационарная черная дыра не может быть источником какого-либо массивного поля, поскольку для таких полей возможны все моды излучения, включая $l = 0$, и, согласно гипотезе Уилера, все они должны излучаться при переходе черной дыры в стационарное состояние. Аналогичное заключение должно иметь место и для скалярного безмассового поля.

Эти соображения означают, что гипотеза Уилера эквивалентна следующему утверждению: независимо от деталей коллапса, строения и свойств коллапсирующего тела возникающая стационарная черная дыра однозначно описывается геометрией, определяемой параметрами M, J и Q . Это свойство стационарных черных дыр Уилер образно охарактеризовал следующим известным высказыванием: "Черные дыры не имеют волос".

К настоящему времени получено почти исчерпывающее доказательство гипотезы Уилера. В этой главе собраны основные результаты, связанные с этим доказательством.

§ 6.2. Общие свойства стационарных черных дыр

Поскольку имеются все основания считать, что при отсутствии внешних воздействий и в пренебрежении квантовыми эффектами конечное состояние любой черной дыры является стационарным, то, естественно при описании свойств этих конечных состояний начать с изучения стационарных черных дыр.

Свойство стационарности пространства-времени означает возможность так ввести в нем координаты, что коэффициенты метрики будут независимы от одной из них — "временной" координаты. На "более" геометрическом языке это означает, что пространство-время допускает однопараметрическую группу движений, генераторами которой является $\xi^\mu \partial_\mu$, где ξ^μ — векторное поле Киллинга, удовлетворяющее уравнению

$$\xi_{(\mu;\nu)} = 0. \quad (6.2.1)$$

Так как мы хотим, чтобы пространство-время не изменялось при сдвиге "по времени", то логично потребовать, чтобы вектор ξ был времениподобным и $\xi \cdot \xi < 0$. В общем случае, однако, нельзя гарантировать, что $\xi \cdot \xi$ имеет один и тот же знак во всем пространстве-времени. Поэтому мы будем называть асимптотически плоское пространство стационарным, если оно допускает векторное поле Киллинга ξ^μ , являющееся времениподобным ($\xi \cdot \xi < 0$) в окрестности $\mathcal{I}^+$ и $\mathcal{I}^-$.

Для доказательства содержательных утверждений относительно общих свойств стационарных черных дыр приходится дополнительно сделать два следующих предположения:

- 1) пространство-время является регулярно предсказуемым;

*) Если в природе существуют магнитные монополи и коллапсирующее тело обладает магнитным зарядом, то для описания стационарной черной дыры требуется задание величины этого заряда в качестве четвертого параметра.

2) пространство-время либо является пустым, либо содержит поля, описываемые гиперболическими уравнениями и удовлетворяющие условию энергодоминантности: для произвольных времениподобных векторов ξ_1^μ и ξ_2^μ тензор энергии-импульса поля $T^{\mu\nu}$ удовлетворяет неравенству $T^{\mu\nu} \xi_{1\mu} \xi_{2\nu} \geq 0$.

Первое предположение, касающееся общей причинной структуры пространства-времени и подробно обсуждавшееся в предыдущей главе (см. сноску на с. 102), имеет в известной мере технический характер. Условие энергодоминантности (из которого, в частности, следует слабое энергетическое условие) означает следующее: любой наблюдатель видит, что локальная энергия неотрицательна, а локальный поток энергии непространственноподобен. Второе предположение заведомо выполняется для электромагнитного поля [более подробно обсуждение см. Хокинг, Эллис (1973)]. В дальнейшем (в данной главе), не оговаривая этого особо, будем считать, что приведенные выше предположения выполняются.

В стационарном пространстве-времени площадь поверхности черной дыры не зависит от времени. Поэтому сходимость ρ световых лучей, образующих горизонт событий, тождественно равна нулю. Вследствие этого горизонт видимости совпадает с горизонтом событий. Используя соотношения (5.3.20), (5.3.22) и (5.3.23), нетрудно убедиться, что следствием слабого энергетического условия ($\Phi \geq 0$) и постоянства площади поверхности черной дыры является обращение в нуль на поверхности горизонта величин σ , Φ и Ψ :

$$\sigma|_{H^+} = 0, \quad \Phi|_{H^+} = 0, \quad \Psi|_{H^+} = 0. \quad (6.2.2)$$

Последние два равенства можно интерпретировать как отсутствие потоков вещества и физических полей ($\Phi = 0$) и гравитационного излучения ($\Psi = 0$) через горизонт событий.

Каждая связная компонента горизонта $\partial \mathcal{B}(\tau)$ в заданный момент τ в стационарном пространстве-времени, так же как и в общем случае, является компактной и односвязной. Более того, как показал Хокинг (1972a), в стационарном случае топология поверхности каждой черной дыры совпадает с топологией двумерной сферы S^2 . Топологии поверхности черной дыры, отличные от S^2 , возможны в случае, если нарушается условие энергодоминантности [Героч, Хартль (1982)].

В принципе не исключен случай, когда в стационарном пространстве-времени имеется несколько связных компонент $\partial \mathcal{B}(\tau)$ и соответственно несколько 'неподвижных' черных дыр. Такое равновесие возможно только, если гравитационное притяжение скомпенсировано электромагнитным отталкиванием (или отталкиванием силами другой природы). В частности, если имеется несколько заряженных черных дыр, обладающих массами m_i и зарядами Q_i , удовлетворяющими соотношению $m_i = Q_i \sqrt{G}$, то система таких черных дыр будет находиться в равновесии [Хартль, Хокинг (1972), Охта, Кимура (1982)].

В дальнейшем мы будем рассматривать тот случай, когда имеется лишь одна стационарная черная дыра, и ограничим рассмотрение областью пространства-времени, лежащей вне этой черной дыры. В общем случае полное пространство-время стационарной черной дыры наряду с горизонтом событий H^+ может содержать также горизонт событий прошлого $H^- = J^+(\mathcal{I}^-)$

(в этом нетрудно убедиться на примере шварцшильдовской черной дыры, диаграмма Пенроуза которой для полного пространства-времени приведена на рис. 50с). Область $J^+(\mathcal{Y}^-) \cap J^-(\mathcal{Y}^+)$ пространства-времени, лежащая вне H^- и H^+ , называется *внешней*. Для событий, происходящих во внешней области, характерно то свойство, что найдутся причинные кривые, связывающие их как с $\mathcal{Y}^-$, так и с $\mathcal{Y}^+$. Можно доказать [см., например, Хокинг, Эллис (1973)], что в стационарном пространстве векторное поле Киллинга ξ отлично от нуля во всей внешней области и на части $H^+ \cap J^+(\mathcal{Y}^-)$ горизонта событий.

Для более детального описания свойств стационарных пространств удобно ввести в рассмотрение следующий дифференциальный инвариант ω^α , связанный с векторным полем Киллинга ξ^μ соотношением

$$\omega^\alpha = \xi_{\mu;\nu} \xi^\mu e^{\mu\nu\lambda\alpha}, \quad (6.2.3)$$

где $e^{\mu\nu\lambda\alpha}$ — полностью антисимметричный тензор. Стационарное пространство называют *статическим*, если $\omega^\alpha = 0$. Обращение ω^α в нуль, согласно теореме Фробениуса, является необходимым и достаточным условием того, что векторное поле ξ^μ ортогонально некоторой поверхности. Иными словами, если $\omega^\alpha = 0$, то найдутся две скалярные функции α и t такие, что выполняется равенство

$$\xi_\mu = \alpha_{, \mu}. \quad (6.2.4)$$

В области, где $\xi^\mu \neq 0$, можно использовать t в качестве одной из координат (временной координаты), дополнив ее тремя другими x^i . Удобно выбрать координаты x^i следующим образом. Зафиксируем произвольную поверхность $t = \text{const}$, введем на ней координаты x^i и распространим их на все пространство, потребовав, чтобы они были постоянными вдоль интегральных кривых ξ^μ . Метрика статического пространства в подобных координатах имеет вид

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j. \quad (6.2.5)$$

Используя уравнение Киллинга (6.2.1), нетрудно убедиться, что $\partial_t h_{ij} = 0$, а координатный произвол $t \rightarrow t' = f(t)$ можно использовать, чтобы добиться выполнения следующих соотношений:

$$\alpha = V^2 = -\xi_\mu \cdot \xi^\mu, \quad \partial_t V = 0, \quad \xi^\mu \partial_\mu = \partial_t. \quad (6.2.6)$$

Оставшийся после этого произвол в выборе координат отвечает преобразованиям

$$t \rightarrow t' = t + t_0, \quad x^i \rightarrow x'^i = f^i(x^i). \quad (6.2.7)$$

Заметим, что поскольку V и h_{ij} не зависят от t , то метрика (6.2.5) оказывается инвариантной также относительно преобразования $t \rightarrow -t$. Верно и обратное, а именно, всякая стационарная метрика, допускающая дополнительную симметрию обращения времени $t \rightarrow -t$, является статической.

Важным свойством статических черных дыр является то, что во всей их внешней области векторное поле Киллинга ξ^μ времениподобно, а на части горизонта событий $H^+ \cap J^+(\mathcal{Y}^-)$, ограничивающей внешнюю область, ξ^μ отлично от нуля, светоподобно и направлено вдоль образующих H^+ . Последнее свойство легко доказать следующим образом. Используя равенство

$\xi_{[\mu;\nu}\xi_{\alpha]} = 0$, вытекающее из условия $\omega^\alpha = 0$, и соотношение (6.2.1), имеем

$$2\xi_{\alpha;[\mu}\xi_{\nu]} = -\xi_{\mu;\nu}\xi_\alpha. \quad (6.2.8)$$

С помощью этого равенства нетрудно убедиться, что

$$(V^2)_{;[\mu}\xi_{\nu]} = -V^2\xi_{\mu;\nu} \quad (6.2.9)$$

и, следовательно, поверхность $V^2 = 0$ является световой, так как нормаль к ней $((V^2)_{; \mu})$ совпадает на ней по направлению со световым вектором ξ^μ . Поскольку $(V^2)_{; \mu}$ и ξ_μ параллельны, то

$$-\frac{1}{2}(V^2)_{; \mu} = \xi^\mu{}_{;\nu}\xi^\nu = \kappa\xi^\mu \quad (6.2.10)$$

и, следовательно, ξ^μ — касательный вектор к световой геодезической (образующей поверхности $V^2 = 0$). Эти световые геодезические не выходят на $\mathcal{I}^+$, поскольку все время находятся на поверхности, где $\xi_\mu\xi^\mu = 0$, в то время как у $\mathcal{I}^+$ $\xi_\mu\xi^\mu = -1$. С другой стороны, расходимость световых образующих поверхности $V = 0$ равна нулю. Это означает, что такая поверхность является внешней ловушечной поверхностью, а поскольку пространство-время стационарно, то одновременно она является горизонтом событий [Вишневшара (1968)].

Если стационарная черная дыра не является статической, то векторное поле Киллинга ξ^μ неизбежно становится пространственноподобным в некоторой части внешней области [Хокинг, Эллис (1973)]. Эта область, где $\xi^2 > 0$, получила название *эргосферы*.

Возникновение эргосферы вне нестатической стационарной черной дыры приводит к ряду важных физических следствий. Более подробно эти следствия обсуждаются в последующих главах. Сейчас мы остановимся лишь на одном из них. Напомним, что, согласно теореме Нетер, симметриям пространства-времени отвечают законы сохранения определенных физических величин. В частности, однородности во времени отвечает закон сохранения энергии. Для частицы, движущейся в стационарном пространстве-времени с векторным полем Киллинга ξ^μ , эта сохраняющаяся величина (энергия) ϵ записывается следующим образом^{*)}:

$$\epsilon = -p^\mu\xi_\mu, \quad (6.2.11)$$

где p^μ — 4-импульс частицы. Поскольку p^μ — направленный в будущее времениподобный или световой вектор, то для частиц вне эргосферы $\epsilon \geq 0$. Однако для частиц или лучей света, находящихся в эргосфере, возможно выполнение обратного неравенства $\epsilon < 0$. Такие частицы, очевидно, могут покинуть эргосферу, только провалившись внутрь черной дыры. Это возможно лишь в том случае, если эргосфера пересекает горизонт событий.

Наличие состояний с отрицательной энергией ϵ в эргосфере делает возможным следующий механизм извлечения энергии из стационарных нестатических черных дыр, предложенный Пенроузом (1969). Представим себе

^{*)} Сохранение ϵ ($p^\nu\epsilon_{,\nu} = 0$) вытекает из соотношения $p^\nu\epsilon_{,\nu} = p^\nu p_{;\mu}^\mu \xi_\mu + p^\mu p^\nu \xi_{\mu;\nu}$; $p^\nu p_{;\mu}^\mu \xi_\mu$ — геодезичности движения $p^\nu p_{;\mu}^\mu$; $p^\nu = 0$ и уравнения Киллинга (6.2.1).

(рис. 64), что частица с импульсом p_0^μ , попав в эргосферу, распадается там на пару частиц с импульсами p_1^μ и p_2^μ ($p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$), так что $\epsilon_2 = -p_2^\mu \xi_\mu < 0$, а частица с импульсом p_1^μ вылетает обратно. Тогда энергия вылетающей частицы $\epsilon_1 = -p_1^\mu \xi_\mu = \epsilon_0 - \epsilon_2$ будет больше энергии падающей частицы $\epsilon_0 = -p_0^\mu \xi_\mu$, что и означает возможность извлечения энергии в этом процессе.

Существенное отличие свойств черных дыр с $\omega^\mu = 0$ и $\omega^\mu \neq 0$ связано с тем, что нестатические стационарные черные дыры в известном смысле

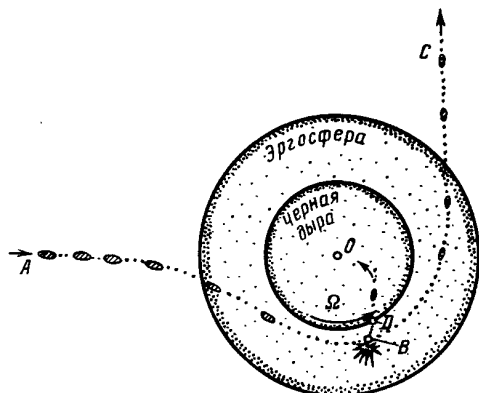


Рис. 64. Процесс Пенроуза. Тело, падающее с некоторого расстояния (положение А), влетает в эргосферу вращающейся черной дыры и, взрываясь, распадается в точке В около поверхности черной дыры на две части, одна из которых поглощается черной дырой — точка D (параметры "взрыва" выбраны так, что энергия этой части отрицательна). Другая часть вылетает из эргосферы (точка С), обладая энергией, большей, чем энергия падающего тела

обладают вращением. Появление отрицательных энергий при движении частиц в поле вращающейся черной дыры можно объяснить, если принять во внимание дополнительное гравитационное взаимодействие углового момента этой частицы с угловым моментом вращающейся черной дыры. Энергия, сообщаемая вылетающей в процессе Пенроуза частице, черпается из энергии вращения черной дыры.

После этих замечаний возвратимся к обсуждению общих свойств стационарных черных дыр и рассмотрим вопрос о взаимном расположении эргосферы и горизонта событий. В принципе возможна ситуация, когда эргосфера не пересекается с горизонтом и целиком лежит вне его. Однако, по-видимому, эта ситуация неустойчива [Хокинг, Эллис (1973)]. Поэтому мы сделаем предположение, что в стационарном пространстве-времени, описывающем конечное состояние черной дыры, эргосфера пересекает горизонт. Это означает, что на горизонте событий имеются точки, где векторное поле Киллинга ξ^μ пространственноподобно. Покажем, что в этом случае черная дыра обязательно является аксиально-симметричной.

Пусть S_0 — поверхность черной дыры в некоторый момент времени. Как указывалось выше, для стационарной черной дыры S_0 имеет топологию двумерной сферы S^2 . Обозначим через S_ν сечения горизонта событий,

возникающие путем сдвига точек S_0 вдоль интегральных кривых $x^\mu(v)$ поля ξ^μ ($dx^\mu/dv = \xi^\mu$) на величину, отвечающую параметру v (рис. 65). Пусть точка $p_0 \in S_0$ при этом переходит в точку $p_v^\xi \in S_v$. Обозначим через p_v^l точку пересечения образующей горизонта событий, проходящей через p_0 , с S_v . Поскольку l^μ и ξ^μ непараллельны, то отображение $p_0 \rightarrow p_v^\xi$ является нетривиальным преобразованием S_v в себя. Обращение в нуль сходимости ρ и сдвига σ на горизонте событий стационарной черной дыры приводит к тому, что расстояние между любой парой точек p_v^l и q_v^l на S_v совпадает с расстоянием между отвечающими им точками p_0 и q_0 на S_0 . С другой стороны, поскольку ξ^μ — векторное поле Киллинга, то это расстояние совпадает также с расстоянием между p_v^ξ и q_v^ξ . Тем самым преобразование $p_v^l \rightarrow p_v^\xi$ является преобразованием симметрии, переводящим поверхность S_v в себя. Поскольку S_v имеет топологию сферы S^2 , то под действием описанной группы изометрий все ее точки, за исключением двух ("полюсов"), движутся, причем их орбиты — замкнутые окружности. Иными словами, поверхность стационарной нестатической черной дыры аксиально-симметрична. Если метрика, описывающая стационарную черную дыру, является аналитической*), то из аксиальной симметрии горизонта событий вытекает аксиальная симметрия всего пространства-времени. Этот результат составляет содержание следующей теоремы, доказанной Хокингом (1972a).

Пусть эргосфера в стационарном нестатическом пространстве имеет пересечение с горизонтом событий $H^+ \cap J^+(\mathcal{Y}^-)$. Тогда существует однопараметрическая циклическая группа изометрий, генераторы которой коммутируют с ξ^μ и орбиты которой пространственноподобны вблизи $\mathcal{Y}^+$ и $\mathcal{Y}^-$.

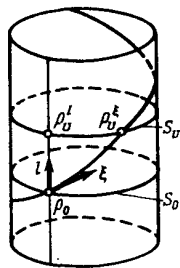


Рис. 65. Стационарная вращающаяся черная дыра является аксиально-симметричной. Иллюстрация к доказательству теоремы Хокинга

Эта теорема справедлива и в тех случаях, когда метрика неаналитична в изолированных областях вне горизонта.

В заключение параграфа подведем краткий итог. Итак, конечное состояние одиночной черной дыры описывается стационарной метрикой. При этом либо черная дыра не вращается и эта метрика статична, либо она вращается, тогда пространство-время обладает дополнительной аксиальной симмет-

*) О свойствах аналитичности стационарных аксиально-симметричных асимптотически плоских решений уравнений Эйнштейна см. Мюллер цум Хаген (1970).

рий. Следующие два параграфа посвящены доказательству так называемых *теорем единственности*, согласно которым как статические, так и нестатические стационарные черные дыры устроены относительно просто. А именно, будут рассмотрены стационарные решения уравнений Эйнштейна—Максвелла и показано, что все такие решения, описывающие стационарную черную дыру, сводятся к метрике Керра—Ньюмена (6.4.33); при этом, если вращение отсутствует, соответствующее решение сводится к решению Рейсснера—Нордстрема. Обсуждение роли остальных физических полей и их "волос" мы отложим до последнего параграфа этой главы.

§ 6.3. Теорема единственности для статических черных дыр

Обсудим вопрос о статических решениях вакуумных уравнений Эйнштейна. Выберем координаты в статическом пространстве-времени так, как было указано выше, и запишем статическую метрику в форме (6.2.5):

$$ds^2 = -V^2 dt + h_{ij} dx^i dx^j, \quad i = 1, 2, 3; \quad V = V(x^1, x^2, x^3); \quad h_{ij} = h_{ij}(x^1, x^2, x^3). \quad (6.3.1)$$

Обозначим через ${}^{(3)}R_{ij}$ тензор Риччи трехмерного пространства Σ , описываемого уравнением $t = \text{const}$ и обладающего метрикой h_{ij} . Тогда вакуумные уравнения Эйнштейна эквивалентны следующим уравнениям:

$$h^{ij} V_{;ij} = 0, \quad (6.3.2a)$$

$$V_{;ij} - {}^{(3)}R_{ij} V = 0. \quad (6.3.2b)$$

Здесь $(\quad)_{;i}$ обозначает ковариантную производную в метрике h_{ij} .

Предположим, что рассматриваемое пространство-время с метрикой (6.3.1): 1) является асимптотически плоским, 2) обладает горизонтом событий и 3) не содержит сингулярностей, лежащих вне или на горизонте событий.

Более детально эти предположения означают следующее:

1) Пространство Σ является асимптотически евклидовым, т.е. существует такой выбор координат x^i , в которых

$$h_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-1}), \quad \partial_k h_{ij} = O(r^{-2}), \quad V = 1 - M/r + \eta, \quad (6.3.3)$$

$$M = \text{const}, \quad \eta = O(r^{-2}), \quad \partial_i \eta = O(r^{-3}), \quad \partial_i \partial_j \eta = O(r^{-4})$$

при $r \equiv (\delta_{ij} x^i x^j)^{1/2} \rightarrow \infty$.

2) Функция V обращается в нуль на Σ , причем множество $V(x^i) = 0$ является связной регулярной гладкой поверхностью.

Строго говоря, точки, где $V = 0$, не покрываются координатами t, x^1, x^2, x^3 , поскольку в этих координатах метрика (6.3.1) имеет особенность. Предположение о существовании регулярного горизонта событий означает, что имеется возможность с помощью перехода к новым координатам получить продолжение метрики на часть пространства-времени, содержащую горизонт событий. Поверхность $V = 0$ можно рассматривать как границу Σ , возникающую в результате предельного перехода $V = \delta = \text{const}$ при $\delta \rightarrow +0$. Функция V удовлетворяет эллиптическому уравнению $V_{;i}{}^{;i} = 0$ и, следовательно, является гармонической. Поскольку при $r \rightarrow \infty$ $V = 1$, то при

конечных r вне горизонта она принимает положительные значения, меньшие 1 [о соответствующем свойстве гармонических функций см., например, Яно, Бохнер (1953)].

3) Всюду на Σ (при $0 \leq V < 1$) инвариант $R^2 = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, построенный из четырехмерного тензора кривизны, конечен.

Теорема единственности для статических черных дыр в пустоте гласит:

Всякое статическое решение вакуумных уравнений Эйнштейна, удовлетворяющее условиям 1–3, является сферически-симметричным и совпадает с метрикой Шварцшильда.

Эта теорема при дополнительном условии: 4) эквипотенциальные поверхности $V = \text{const} > 0$ являются регулярными односвязными двумерными замкнутыми поверхностями, была доказана Израэлем (1967). Позднее [см. Мюллер цум Хаген и др. (1973), Робинсон (1977)] было доказано, что это условие, означающее, в частности, что $V_{,\alpha} \neq 0$ всюду при $0 \leq V < 1$, вытекает из условий 1–3.

Основные этапы доказательства теоремы Израэля состоят в следующем. Выбирают функцию V ($V_{,\alpha} \neq 0$) в качестве координаты. Оставшиеся две координаты θ^2 и θ^3 на поверхностях $V = \text{const}$ выбирают так, чтобы координатные линии V ортогонально пересекали поверхности $V = \text{const}$. В этих координатах метрика (6.3.1) записывается в виде

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + \rho^2 dV + b_{XY} d\theta^X d\theta^Y, \quad (6.3.4)$$

где $X, Y = 2, 3$, ρ и b_{XY} являются функциями V, θ^2, θ^3 , а уравнение (6.3.2а) принимает вид

$$\partial_V \left(\frac{\sqrt{b}}{\rho} \right) = 0, \quad b = \det(b_{XY}). \quad (6.3.5)$$

Определим двумерный тензор внешней кривизны K_{XY} поверхности $V = \text{const}$ соотношением

$$K_{XY} = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial b_{XY}}{\partial V}. \quad (6.3.6)$$

Для следа этого тензора $K = b^{XY} K_{XY}$ можно получить выражение $K = \rho^{-1} \partial(\ln \sqrt{b})/\partial V$, которое с учетом (6.3.5) дает

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = \rho^2 K. \quad (6.3.7)$$

Можно показать, что уравнение (6.3.2б) эквивалентно выполнению следующих равенств:

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} + \frac{1}{V} \right) K_X{}^Y = -\rho_{|X}{}^{|Y} + \frac{1}{2} \rho^{(2)} R \delta_X{}^Y - \rho K K_X{}^Y, \quad (6.3.8)$$

$${}^{(2)}R = -K_{XY} K^{XY} + K^2 + \frac{2K}{\rho V}, \quad (6.3.9)$$

$$\partial_X \rho = \rho^2 V (\partial_X K - K_X{}^Y{}_{|Y}), \quad (6.3.10)$$

где ${}^{(2)}R$ — скалярная кривизна двумерной поверхности $V = \text{const}$, а $(\)_{|X}$

означает ковариантную производную в метрике b_{XY} . Уравнения (6.3.5), (6.3.6) и (6.3.8) позволяют определить зависимость от V неизвестных функций ρ , b_{XY} и K_{XY} , а (6.3.9) и (6.3.10) играют роль связей: если они выполняются при одном значении V , то, в силу остальных уравнений, выполняются при всех V .

Следующий этап состоит в нахождении условий, которые налагает на неизвестные функции предположение 3. С этой целью запишем инвариант $R^2 = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ в обозначениях ρ , b_{XY} и K_{XY} :

$$\frac{1}{8} R^2 = (V\rho)^{-2} \left(K_{XY} K^{XY} + \frac{2\rho_{|X}\rho^{|X}}{\rho^2} + K^2 \right). \quad (6.3.11)$$

Из уравнения (6.3.5) следует, что $\sqrt{b} = c(x^Y)\rho$, и поэтому из регулярности поверхности $V = 0$ следует, что $\rho(V = 0, \theta^2, \theta^3) \neq 0$, а из регулярности R^2 при $V = 0$ находим

$$K_{XY}(V = 0, \theta^2, \theta^3) = 0, \quad \rho(V = 0, \theta^2, \theta^3) = \rho_0 = \text{const},$$

$$\lim_{V \rightarrow 0} (K/V) = \frac{1}{2} \rho_0 {}^{(2)}R(V = 0, \theta^2, \theta^3). \quad (6.3.12)$$

Если обозначить через $A_0 = \int_{V=0} \sqrt{b} d\theta^2 d\theta^3$ площадь поверхности черной дыры, то, интегрируя (6.3.5) по V от 0 до 1, с учетом граничных условий (6.3.3) и (6.3.12) имеем

$$A_0 = 4\pi M\rho_0. \quad (6.3.13)$$

Отсюда вытекает, в частности, что M всегда положительно.

С помощью уравнений (6.3.5) и (6.3.7)–(6.3.9) можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\sqrt{b} K}{\sqrt{\rho} V} \right) = - \frac{2\sqrt{b}}{V} \left[{}^{(2)}\Delta(\rho^{1/2}) + \rho^{-3/2} \left(\frac{1}{2} \rho_{|X}\rho^{|X} + \Psi_{XY}\Psi^{XY} \right) \right], \quad (6.3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{\sqrt{b}}{\rho} \left(KV + \frac{4}{\rho} \right) \right] = -\sqrt{b} V [{}^{(2)}\Delta(\ln \rho) + \rho^{-2} (\rho_{|X}\rho^{|X} + 2\Psi_{XY}\Psi^{XY}) + {}^{(2)}R], \quad (6.3.15)$$

$$\text{где } {}^{(2)}\Delta \equiv ()_{|X}{}^{|X} \text{ и } \Psi_{XY} = \left(K_{XY} - \frac{1}{2} K b_{XY} \right) \rho.$$

Последний этап доказательства состоит в интегрировании соотношений (6.3.14) и (6.3.15) по V от 0 до 1. Если учесть граничные условия (6.3.3) и (6.3.12) и использовать тождество

$$\int_{V=\text{const}} {}^{(2)}\Delta f \sqrt{b} d\theta^2 d\theta^3 = 0, \quad (6.3.16)$$

справедливое для произвольной функции f , и теорему Гаусса – Бонне:

$$\int_{V=\text{const}} {}^{(2)}R \sqrt{b} d\theta^2 d\theta^3 = 8\pi, \quad (6.3.17)$$

то получаем неравенства

$$\rho_0 \geq 4M, \quad A_0 \geq \pi \rho_0^2, \quad (6.3.18)$$

причем равенства имеют место тогда и только тогда, когда везде на Σ

$$\Psi_{XY} = 0, \quad \rho_{|X} = 0. \quad (6.3.19)$$

Сравнивая (6.3.18) с (6.3.13), нетрудно убедиться, что эти соотношения не противоречат друг другу только в том случае, если в (6.3.18) всюду стоят знаки равенства, а следовательно, выполнены соотношения (6.3.19). Эти соотношения показывают, что рассматриваемое вакуумное решение уравнений Эйнштейна является сферически-симметричным, т.е. в соответствии с теоремой Биркгофа (1923) совпадает с решением Шварцшильда.

Аналогичная теорема единственности имеет место в случае, если отказаться от условия выполнения вакуумных уравнений Эйнштейна, заменив их системой уравнений Эйнштейна — Максвелла. В этой ситуации черная дыра может обладать зарядом, соответствующее единственное решение сферически-симметрично и совпадает с метрикой Рейсснера — Нордстрема [Израэль (1968)].

§ 6.4. Теорема единственности для стационарных аксиально-симметричных черных дыр

Перейдем теперь к обсуждению свойств решений уравнений Эйнштейна — Максвелла, описывающих стационарные аксиально-симметричные черные дыры. В подобных пространствах наряду с векторным полем Киллинга $\xi_{(t)}^\mu$, нормированным на бесконечности условием $\xi_{(t)\mu}^\mu = -1$, имеется также пространственноподобное векторное поле Киллинга $\xi_{(\varphi)}^\mu$, отвечающее симметрии пространства относительно вращения. Это поле коммутирует с $\xi_{(t)}^\mu$ и обладает замкнутыми интегральными кривыми. Поле $\xi_{(\varphi)}^\mu$ отлично от нуля всюду во внешней области и на горизонте, кроме оси вращения, на которой $\xi_{(\varphi)}^\mu = 0$. Если обозначить $X = \xi_{(\varphi)}^\mu \xi_{(\varphi)\mu}$, то условие регулярности (локальной евклидовости) пространства-времени на оси вращения выполняется, когда

$$\left. \frac{X^{\cdot\alpha} X_{,\alpha}}{4X} \right|_{X=0} = 1. \quad (6.4.1)$$

Векторные поля $\xi_{(t)}^\mu$ и $\xi_{(\varphi)}^\mu$ с описанными выше свойствами, включая условие нормировки (6.4.1), определены в стационарном аксиально-симметричном асимптотически плоском пространстве однозначно.

В таком пространстве можно ввести координаты t, φ, x^X ($X = 1, 2$) так, что выполняются соотношения

$$ds^2 = -V dt^2 + 2W d\varphi dt + X d\varphi^2 + 2g_{0X} dx^X dt + 2g_{\varphi X} dx^X d\varphi + \gamma_{XY} dx^X dx^Y, \quad (6.4.2)$$

где

$$V = -\xi_{(t)}^\alpha \xi_{(t)\alpha}, \quad X = \xi_{(\varphi)}^\alpha \xi_{(\varphi)\alpha}, \quad W = \xi_{(t)}^\alpha \xi_{(\varphi)\alpha}, \\ \xi_{(t)}^\alpha = \delta_t^\alpha, \quad \xi_{(\varphi)}^\alpha = \delta_\varphi^\alpha, \quad (6.4.3)$$

а функции $V, X, W, g_{0X}, g_{\varphi X}$ и γ_{XY} не зависят от t и φ . Говорят, что метрика (6.4.2) удовлетворяет *условию циркулярности*, если за счет координатных преобразований, сохраняющих форму (6.4.2), можно добиться обращения в нуль коэффициентов g_{0X} и $g_{\varphi X}$. В этом случае двумерные поверхности $t = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ являются ортогональными двумерным поверхностям, образованным интегральными кривыми полей $\xi_{(t)}^\mu$ и $\xi_{(\varphi)}^\mu$. Необходимым и достаточным условием для циркулярности метрики является выполнение следующих соотношений [см., например, Крамер и др. (1980)]:

$$e^{\alpha\beta\gamma\delta}\xi_{(\varphi)\alpha}\xi_{(t)\beta}\xi_{(t)\gamma;\delta} = 0, \quad e^{\alpha\beta\gamma\delta}\xi_{(t)\alpha}\xi_{(\varphi)\beta}\xi_{(\varphi)\gamma;\delta} = 0. \quad (6.4.4)$$

Можно показать [Кундт, Трюмпер (1966), Картер (1973а)], что эти соотношения имеют место тогда и только тогда, когда тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условиям

$$\xi_{(t)}^\delta R_{\delta[\alpha}\xi_{(t)\beta}\xi_{(\varphi)\gamma]} = 0, \quad \xi_{(\varphi)}^\delta R_{\delta[\alpha}\xi_{(\varphi)\beta}\xi_{(t)\gamma]} = 0. \quad (6.4.5)$$

Очевидно, что для вакуумных решений уравнений Эйнштейна эти условия выполняются. Нетрудно убедиться, что они также справедливы и вне источников в электровакуумных пространствах [Картер (1969)]. Таким образом, в интересующем нас случае (стационарные аксиально-симметричные решения уравнений Эйнштейна — Максвелла) условие циркулярности выполнено и элемент длины (6.4.2) допускает следующее представление:

$$ds^2 = -V dt^2 + 2W d\varphi dt + X d\varphi^2 + d\gamma^2, \quad (6.4.6)$$

где

$$d\gamma^2 = \gamma_{XY}(x^Z)dx^X dx^Y.$$

Картер (1969) показал, что если выполняется условие причинности (отсутствуют замкнутые времениподобные линии), то величины

$$\rho^2 \equiv VX + W^2 \quad (6.4.7)$$

и X положительны во всей внешней области, за исключением оси вращения, где $X = W = 0$, и горизонта событий, ограничивающего внешнюю область, где ρ^2 обращается в нуль. Для статической черной дыры $W = 0$, и уравнение горизонта событий принимает вид $V = 0$.

Если выполнены уравнения Эйнштейна или уравнения Эйнштейна — Максвелла, то функция ρ является гармонической:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_X (\sqrt{\gamma} \gamma^{XY} \partial_Y \rho) = 0. \quad (6.4.8)$$

Поскольку всякая двумерная метрика является конформно-плоской, то $d\gamma^2$ можно записать в виде

$$d\gamma^2 = \tilde{U}(x^1, x^2) [(dx^1)^2 + (dx^2)^2]. \quad (6.4.9)$$

Удобнее, однако, для описания свойств метрики в окрестности горизонта ввести координаты λ и μ , которые в асимптотически удаленной области связаны со стандартными сферическими координатами r и θ

соотношениями

$$\lambda \approx r - M, \quad \mu \approx \cos \theta. \quad (6.4.10)$$

Здесь M — измеряемая асимптотически удаленным наблюдателем масса черной дыры, а метрика $d\gamma^2$ в этих координатах имеет вид

$$d\gamma^2 = U(\lambda, \mu) d\gamma_0^2, \quad (6.4.11a)$$

$$d\gamma_0^2 = \frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - C^2} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2}. \quad (6.4.11b)$$

Картер (1971) показал, что координаты t, λ, μ, φ покрывают всю внешнюю область стационарной черной дыры (за исключением оси вращения, где эти координаты имеют очевидную особенность). При этом φ периодична (с периодом 2π), t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, μ пробегает значения от -1 до $+1$ (граничные значения достигаются на "северной" и "южной" полярных осях), а $\lambda > C > 0$ (значению $\lambda = C$ отвечает горизонт событий, и $\lambda \rightarrow \infty$ для асимптотически удаленных точек). В этих координатах

$$\rho^2 \equiv VX + W^2 = (\lambda^2 - C^2)(1 - \mu^2), \quad (6.4.12)$$

а электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ вне источников записывается следующим образом:

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu, \quad A_\mu dx^\mu = \Phi dt + B d\varphi; \quad (6.4.13)$$

величины V, X, W, U, Φ и B являются функциями от λ и μ .

Перейдем теперь к изложению основных этапов доказательства теоремы единственности для аксиально-симметричных стационарных черных дыр. Они состоят в следующем:

1) Используя метод, развитый Эрнстом (1968a, b) [см. также Крамер и др. (1980)], можно свести нахождение решения уравнения Эйнштейна — Максвелла к задаче решения системы двух эллиптических уравнений второго порядка для двух комплексных функций от переменных λ и μ (потенциалов Эрнста). При этом оказывается, что полученные уравнения совпадают с уравнениями движения для определенного лагранжиана.

2) Анализируются условия на коэффициенты метрики (6.4.6), (6.4.11) и компоненты электромагнитного поля (6.4.13), вытекающие из требования регулярности пространства-времени в окрестности горизонта событий и на оси вращения, а также из предположения о том, что пространство является асимптотически плоским. Эти условия затем переформулируются эквивалентным образом в виде граничных условий для потенциалов Эрнста в особых точках $\lambda = C, \lambda = \infty, |\mu| = 1$.

3) Используя свойства инвариантности введенного для рассматриваемой задачи лагранжиана, получают дифференциальное условие, связывающее произвольные два решения. С помощью этого условия доказывается, что любые два решения, удовлетворяющие найденным граничным условиям с фиксированным значением входящих в них произвольных постоянных, совпадают.

4) Показывается, что известное решение Керра — Ньюмена, описывающее заряженную вращающуюся черную дыру, удовлетворяет указанным граничным условиям и содержит нужное число произвольных постоянных. Тем самым устанавливается, что этим семейством решений исчерпываются

все решения, описывающие стационарные аксиально-симметричные черные дыры.

Исходным пунктом при реализации описанной выше программы является следующее замечание. Пусть известны функции X , W , Φ и B , отвечающие некоторому аксиально-симметричному стационарному асимптотически плоскому решению уравнений Эйнштейна – Максвелла. Тогда функция V для этого решения определяется из соотношения (6.4.12), а функция U может быть однозначно определена путем решения уравнения, вытекающего из полной системы Эйнштейна – Максвелла [Крамер и др. (1980)].

Перейдем от переменных Φ , W к новым переменным E , Y с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} E_{,\mu} &= (X\Phi_{,\lambda} - WB_{,\lambda})/(1 - \mu^2), \\ E_{,\lambda} &= -(X\Phi_{,\mu} - WB_{,\mu})/(\lambda^2 - C^2), \\ Y_{,\mu} &= (XW_{,\lambda} - WX_{,\lambda})/(1 - \mu^2) + 2(BE_{,\mu} - EB_{,\mu}), \\ Y_{,\lambda} &= -(XW_{,\mu} - WX_{,\mu})/(\lambda^2 - C^2) + 2(BE_{,\lambda} - EB_{,\lambda}). \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

Можно показать, что исходная система уравнений Эйнштейна – Максвелла обеспечивает выполнение условий совместности для этой системы и приводит к четырем нелинейным уравнениям в частных производных для четырех неизвестных функций (потенциалов Эрнста) X , Y , E , B , которые могут быть получены варьированием следующего функционала "действия":

$$S \equiv \int \sqrt{\gamma_0} \, d\lambda \, d\mu \, \mathcal{L}, \quad (6.4.15)$$

где "лагранжиан"

$$\mathcal{L} = (2X^2)^{-1} [(\nabla X)^2 + \{\nabla Y + 2(E\nabla B - B\nabla E)\}^2] + 2X^{-1} [(\nabla E)^2 + (\nabla B)^2]. \quad (6.4.16)$$

Здесь все операции свертки и поднятия индексов осуществляются с помощью двумерной метрики $d\gamma_0^2$ (6.4.11b). В отсутствие электромагнитного поля для получения решений вакуумных уравнений Эйнштейна достаточно положить $E = B = 0$; при этом "лагранжиан" $\mathcal{L}$ принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{(\nabla X)^2 + (\nabla Y)^2}{2X^2}. \quad (6.4.17)$$

Картер (1971, 1973а) показал, что граничные условия, однозначно определяющие решение X , Y , E , B , вытекают из следующих предположений: а) пространство-время является асимптотически плоским; б) пространство-время регулярно везде во внешней области, в том числе и на оси симметрии; с) горизонт событий является регулярной поверхностью, т.е. на нем отсутствуют физические особенности. Эти предположения в нашем случае принимают вид:

а) В асимптотически удаленной области (при $\lambda \rightarrow \infty$) E , B , Y и $\lambda^{-2}X$ являются регулярными функциями λ^{-1} и μ со следующими асимптотиками:

$$\begin{aligned} E &= Q\mu + O(\lambda^{-1}), \quad B = P\mu + O(\lambda^{-1}), \\ Y &= 2J\mu(3 - \mu^2) + O(\lambda^{-1}), \quad \lambda^{-2}X = (1 - \mu^2) [1 + O(\lambda^{-1})], \end{aligned} \quad (6.4.18)$$

где J , Q и P – постоянные, имеющие смысл соответственно углового момента, электрического и магнитного монополярного заряда черной дыры.

б) На оси симметрии (при $\mu \rightarrow \pm 1$) E, B, X, Y являются регулярными функциями μ и λ ; при этом выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} E_{,\mu} &= O(1), \quad E_{,\lambda} = O(1 - \mu^2), \quad Y_{,\lambda} = O(1 - \mu^2), \\ Y_{,\mu} + 2(EB_{,\mu} - BE_{,\mu}) &= O(1 - \mu^2), \\ B_{,\mu} &= O(1), \quad B_{,\lambda} = O(1 - \mu^2), \\ X &= O(1 - \mu^2), \quad X^{-1} X_{,\mu} = 1 + O(1 - \mu^2). \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

с) На горизонте событий (при $\lambda \rightarrow C$) E, B, X, Y являются регулярными функциями μ и λ , так что выполняются условия

$$\begin{aligned} E_{,\mu} &= O(1), \quad E_{,\lambda} = O(1), \quad B_{,\mu} = O(1), \quad B_{,\lambda} = O(1), \\ Y_{,\mu} &= O(1), \quad Y_{,\lambda} = O(1), \quad X = O(1). \end{aligned} \quad (6.4.20)$$

В отсутствие электромагнитного поля перечисленные выше условия при $E = B = 0$ превращаются в граничные условия для задачи (6.4.17).

Следующий, основной этап доказательства состоит в установлении дифференциального тождества, связывающего два произвольных стационарных аксиально-симметричных решения. При выводе такого тождества мы будем следовать работе Мазура (1982). При этом существенно используется свойство инвариантности действия (6.4.15)–(6.4.16) относительно группы $SU(1, 2)$ преобразований полевых переменных^{*)}. Для установления этой инвариантности удобно ввести вместо переменных X, Y, E, B новые комплексные переменные ξ, η , связанные с ними соотношениями

$$-X + iY - E^2 - B^2 = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad E + iB = \frac{\eta}{\xi + 1}. \quad (6.4.21)$$

В этих переменных лагранжева плотность (6.4.16) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 2(1 - \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta})^{-2} [(1 - \eta\bar{\eta}) \nabla \xi \nabla \bar{\xi} + \\ &+ (1 - \xi\bar{\xi}) \nabla \eta \nabla \bar{\eta} + \xi\bar{\eta} \nabla \eta \nabla \bar{\xi} + \eta\bar{\xi} \nabla \xi \nabla \bar{\eta}], \end{aligned} \quad (6.4.22)$$

а условие положительности X эквивалентно неравенству

$$\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} < 1. \quad (6.4.23)$$

Обозначим теперь через Φ следующую невырожденную матрицу, которая

^{*)} Действие (6.4.15) – (6.4.16) является частным случаем действия вида

$$S[Z^A] = \int dx \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} \partial_a Z^A \partial_b Z^B G_{AB},$$

где $a, b = 1, \dots, n$; $A, B = 1, \dots, N$; $\gamma^{ab} = \gamma^{ab}(x)$; $G_{AB} = G_{AB}(Z)$. Экстремаль такого действия $Z^A(x)$ называют гармоническим отображением [Мизнер (1978)]. Указанное свойство инвариантности означает, что в рассматриваемом случае нефизическое пространство, в котором Z^A – координаты, а $G_{AB}(Z)$ – метрика, является однородным. Бантинг (1983) предложил иное доказательство теоремы единственности, которое не использует эту симметрию, а основано на свойстве знакопостоянства тензора кривизны в этом пространстве. Изложение этого доказательства и его возможные обобщения см. Картер (1985).

построена из ξ и η :

$$\Phi = (1 - \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta})^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} & 2\bar{\xi} & 2\bar{\eta} \\ 2\xi & 1 + \xi\bar{\xi} - \eta\bar{\eta} & 2\xi\bar{\eta} \\ 2\eta & 2\eta\bar{\xi} & 1 + \eta\bar{\eta} - \xi\bar{\xi} \end{pmatrix}. \quad (6.4.24)$$

Пусть

$$j_Y = \nabla_Y \Phi \cdot \Phi^{-1}, \quad (6.4.25)$$

где $\nabla_Y \Phi$ — матрица, получаемая из Φ почленным дифференцированием ее компонент. С помощью простой проверки можно убедиться, что лагранжева плотность (6.4.22) допускает следующую эквивалентную запись:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{Sp} (j_Y j^Y), \quad (6.4.26)$$

где Sp обозначает взятие матричного следа, а операции с индексом Y производятся с помощью метрики γ_0^{XY} .

Пусть U — псевдоунитарная матрица, удовлетворяющая условию

$$U^\dagger \eta U = \eta, \quad \eta = \text{diag}(-1, 1, 1), \quad \det U = 1. \quad (6.4.27)$$

Тогда матрица

$$\tilde{\Phi} = U \Phi U^{-1} \quad (6.4.28)$$

имеет ту же форму, что и (6.4.24) при новых преобразованных значениях $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$. Если матрица преобразования U не зависит от x^Y , то очевидным образом лагранжева плотность (6.4.26) не изменяется при преобразованиях (6.4.28). Иными словами, имеет место инвариантность действия (6.4.15), (6.4.22) относительно группы $SU(1, 2)$ нелинейных преобразований $(\xi, \eta) \rightarrow (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, порождаемых линейным представлением (6.4.24). В соответствии с первой теоремой Нетер эта инвариантность действия влечет за собой законы сохранения. В рассматриваемом случае они эквивалентны выполнению соотношения

$$\nabla_\mu (\rho j^\mu) = 0 \quad (6.4.29)$$

для решений Φ полевых уравнений.

Рассмотрим теперь два произвольных поля Φ_1 и Φ_2 вида (6.4.24) и образуем из них матрицу $\Phi = \Phi_1 \Phi_2^{-1}$. Тогда можно убедиться, что выполняется следующее дифференциальное тождество:

$$\begin{aligned} & \text{Sp} \{ \Phi [\nabla_X (\rho j_2^X) - \nabla_X (\rho j_1^X)] \} + \nabla_X [\rho \nabla^X (\text{Sp} \Phi)] = \\ & = \rho \text{Sp} \{ \Phi [j_{1X} j_1^X + j_{2X} j_2^X - 2j_{2X} j_1^X] \}, \end{aligned} \quad (6.4.30)$$

где

$$j_i^X = \nabla^X \Phi_i \Phi_i^{-1}. \quad (6.4.31)$$

Тождество (6.4.30) позволяет завершить доказательство теоремы единственности. Пусть (X_1, Y_1, E_1, B_1) и (X_2, Y_2, E_2, B_2) (или Φ_1 и Φ_2) —

решения, описывающие две стационарные аксиально-симметричные черные дыры и удовлетворяющие условиям регулярности (6.4.18) – (6.4.20). Тогда первый член в левой части (6.4.30) обращается в нуль тождественно, а второй – если проинтегрировать выражение (6.4.30) по внешней области $\lambda > C$, $-1 \leq \mu < 1$ и учесть граничные условия (6.4.18) – (6.4.20). С другой стороны, можно показать [Мазур (1982, 1984)], что выражение в правой части тождества (6.4.30) неотрицательно и, следовательно, оно обращается в нуль на решениях Φ_1 и Φ_2 . Далее доказывается, что с учетом граничных условий (6.4.18) – (6.4.20) обращение в нуль правой части (6.4.30) влечет за собой равенство

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad (6.4.32)$$

которое означает, что существует только одно решение уравнений поля в теории (6.4.15), (6.4.22), удовлетворяющее заданным граничным условиям. Тем самым доказывается, что всякая стационарная аксиально-симметричная черная дыра однозначно определяется заданием значений четырех произвольных параметров: C, J, Q и P .

Для завершения доказательства заметим, что следующее стационарное аксиально-симметричное решение уравнений Эйнштейна – Максвелла (решение Керра – Ньюмена) в (6.4.33) $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 + P^2$)

$$ds^2 = - \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [a dt - (r^2 + a^2) d\varphi]^2 + \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right), \quad (6.4.33)$$

$$A_\mu dx^\mu = -\rho^{-2} \{ Qr (dt - a \sin^2 \theta d\varphi) + P \cos \theta [a dt - (r^2 + a^2) d\varphi] \} \quad (6.4.34)$$

удовлетворяет граничным условиям (6.4.18) – (6.4.20) и содержит четыре произвольных параметра: M, a, Q и P (связанные с параметрами J и C соотношениями $J = Ma$ и $C = (M^2 - a^2 - Q^2 - P^2)^{1/2}$). Следовательно, это решение является наиболее общим, описывающим единственную стационарную аксиально-симметричную черную дыру в теории Эйнштейна – Максвелла. Обычно считают, что магнитный монопольный заряд у черной дыры отсутствует ($P = 0$). В этом случае решение (6.4.33) – (6.4.34) переходит в решение (4.2.1), (4.8.1), (4.8.2).

Описанное доказательство теоремы единственности значительно упрощается в случае незаряженной черной дыры. Для перехода к этому случаю достаточно положить $\eta = E = B = 0$ и вместо матрицы (6.4.24) обозначить через Φ матрицу 2×2 , получаемую из (6.4.24) вычеркиванием последней строки и последнего столбца. При этом тождество (6.4.30) переходит в тождество, найденное Робинсоном (1975) при доказательстве теоремы единственности для незаряженных стационарных аксиально-симметричных черных дыр.

Прежде чем перейти к рассмотрению возможности существования неэлектромагнитных "волос" у черных дыр, обсудим вопрос о глобальной структуре пространства-времени Керра – Ньюмена.

§ 6.5. Аналитическое продолжение метрики Керра — Ньюмена внутри горизонта событий

Стационарная метрика вращающейся незаряженной черной дыры вне горизонта событий рассмотрена нами в § 4.4. Там мы изложили причины, по которым метрика Керра, продолженная внутри горизонта событий, не может описывать пространство-время внутри черной дыры. Те же самые соображения применимы, конечно, и к общему случаю заряженной вращающейся черной дыры, описываемой метрикой Керра — Ньюмена (см. § 4.8)*).

В этом параграфе мы тем не менее рассмотрим формальное продолжение метрики Керра — Ньюмена внутри горизонта событий. Причины этого заключаются в следующем.

Во-первых, сама структура этого продолжения оказалась совершенно необычной. Ее изучение показало, насколько топологически сложным может быть полное пространство-время в общей теории относительности. На основе подобного полного решения были высказаны гипотезы о возможности путешествия из одного пространства в другое при наличии образований, подобных описываемому полным решением Керра — Ньюмена. Правда, после доказательства неустойчивости данного решения внутри горизонта событий вероятность какой-либо достоверности таких гипотез стала весьма проблематичной.

Во-вторых, для доказательства неустойчивости решения Керра — Ньюмена внутри черной дыры необходимо привести само решение, а затем и доказательство неустойчивости.

Свойства решения внутри горизонта событий рассматриваются ниже в этом параграфе, доказательство неустойчивости дается в гл. 12.

Полное пространство-время метрики Керра — Ньюмена исследуется в принципе так же, как и в метрике Шварцшильда. Дополнительная трудность здесь связана с отсутствием сферической симметрии. Мы считаем, что $M^2 > Q^2 + a^2$, ибо только в этом случае решение описывает черную дыру. Прежде всего напомним (см. §§ 4.3, 4.4 и 4.8), что горизонт событий в координатах (4.2.1), (4.8.1) находится при $r = r_+ = M + (M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2}$. Метрика (4.2.1) имеет здесь сингулярность, однако сингулярность эта — координатная, что выясняется переходом к координатам Керра (4.4.2); в случае заряженной черной дыры в выражение для Δ входит Q^2 [см. (4.8.1)]. Все инварианты кривизны при $r = r_+$ конечны, и пространство-время не имеет особенностей.

При исследовании метрики внутри черной дыры ($r < r_+$) мы должны помнить, что координаты t, r, θ, φ вовсе не обязаны иметь простой смысл временной и сферических пространственных координат, какой они имели на бесконечности во внешнем пространстве. С подобным обстоятельством мы уже сталкивались при исследовании метрики Шварцшильда (см. § 2.4), где, например, переменная r при $r < r_g$ становилась временной координатой. В метрике Керра — Ньюмена физический смысл координат еще более

*) Хотя в данном параграфе мы полагаем, что у черной дыры отсутствует магнитный заряд, все изложенные в нем результаты легко распространяются на случай, когда этот заряд отличен от нуля.

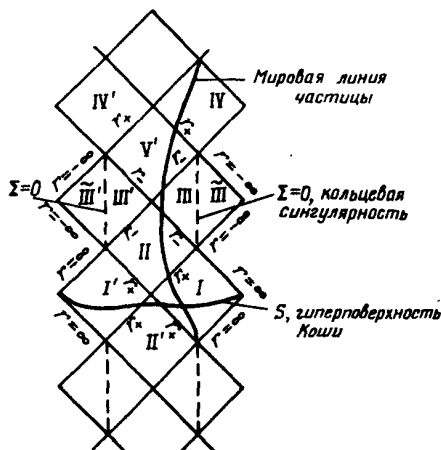
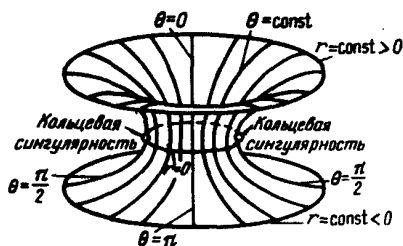


Рис. 66. Качественная структура сечения $t = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ вблизи $r = 0$

Рис. 67. Диаграмма Пенроуза для полного пространства-времени Керра — Ньюмена

сложен. Координатная сетка — это линии, "начерченные" в искривленном четырехмерном многообразии, и их физический смысл в каждом месте может быть выяснен рассмотрением их ориентации относительно светового конуса.

При $r < r_+$ метрика (4.2.1), (4.8.1) имеет сингулярности при

$$r_- \equiv M - (M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2} \quad (6.5.1)$$

и при

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0, \text{ т.е. } r = 0, \quad \theta = \pi/2. \quad (6.5.2)$$

Сингулярность (6.5.1) — координатная, подобно $r = r_+$. Сингулярность (6.5.2) — истинная сингулярность пространства-времени. Качественная структура пространственно-временного сечения $t = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ вблизи $r = 0$ показана на рис. 66.

Истинная сингулярность в сечении $t = \text{const}$ является "кольцом" $r = 0$, $\theta = \pi/2$, лежащим в экваториальной плоскости. Здесь кривизна пространства-времени бесконечна. Если идти (в математическом смысле) вдоль линии $\theta = \text{const} \neq \pi/2$, то никакой сингулярности на пути не встречается; при $r = 0$ пространство-время регулярно, и можно продолжать идти в область $r < 0$. Пространство-время продолжается вплоть до $r = -\infty$. Однако не надо думать, что сечение, изображенное на рис. 66, пространственноподобное. Как видно из (4.2.1), при достаточно малых по модулю отрицательных r и при θ , близких к $\pi/2$, коэффициент при $d\varphi^2$ становится отрицательным, а значит, φ становится времениподобной координатой. Но φ — циклическая переменная с периодом 2π *). Это означает, что при указанных условиях се-

*) Чтобы метрика (4.2.1) на бесконечности $r \rightarrow \infty$ была асимптотически плоской, переменная φ должна меняться от 0 до 2π , а θ — от 0 до π .

чение содержит замкнутые линии времени (расположенные вдоль сингулярного кольца и вблизи него).

Полная структура аналитического продолжения пространства-времени Керра — Ньюмена изображена в виде конформной диаграммы на рис. 67*). Подобная диаграмма для пространства-времени Шварцшильда содержит четыре различные области (см. рис. 50с): белую дыру, две внешние области, асимптотически плоские на бесконечности, и черную дыру. Диаграмма для решения Керра — Ньюмена содержит бесконечное число областей. Области I и I' соответствуют таким же внешним областям для шварцшильдовской черной дыры. Область II' соответствует белой дыре, область II — черной. Однако области эти не ограничены пространственноподобными истинными сингулярностями, как в случае решения Шварцшильда. Область II через две разные границы $r = r_-$ соединяется с областями III и III'. В каждой из этих областей есть по кольцевой сингулярности, рассмотренной выше, и в каждой из этих областей можно, минуя сингулярность, пройти в область $r < 0$ (области III и III') к $r \rightarrow -\infty$. При $r \rightarrow -\infty$ пространства III и III' становятся асимптотически плоскими. В этих пространствах кольцевые сингулярности $\rho^2 = 0$ проявляют себя как "голые сингулярности" отрицательной массы.

Области III и III' через границы r_- соединяются с областью V', являющейся белой дырой, полностью тождественной по своим свойствам области II'. В свою очередь область V' через границы r_+ соединяется с областями IV и IV', полностью тождественными по своим свойствам I и I', и т.д. (до бесконечности).

Временноподобная линия частицы, попавшей из внешней области I в черную дыру (область II), будет продолжаться до пересечения с одной из границ $r = r_-$. В области II возможны движения только к все меньшим r . После пересечения $r = r_-$ частица попадает в область III' или III**). Здесь возможны движения как с уменьшающимися r (вплоть до $r \rightarrow -\infty$), так и с увеличивающимися. В последнем случае частица пересекает границу $r = r_-$, попадает в область V', где возможны движения только с увеличивающимися r , и пересекает одну из границ $r = r_+$, появляясь в областях IV' и IV. Так, частица, мировая линия которой изображена на рис. 67, может из "нашего" внешнего пространства I попасть в другое точно такое же пространство IV.

Заметим, что топологическая структура, изображенная на рис. 67, сохраняется у заряженной черной дыры ($Q \neq 0$), и в случае отсутствия вращения ($a = 0$) (при $Q^2 < M^2$). Только в этом случае сингулярность $\rho^2 = 0$ превращается из кольцевой (в сечении $t = 0$) в точечную. Миновать ее и пройти в область $r < 0$ теперь невозможно. Области III и III' в этом случае отсут-

*) Структура максимального аналитического продолжения для экстремальной черной дыры имеет несколько иной вид [см. Картер (1966а), Хокинг, Эллис (1973)]. Для метрики Рейсснера — Нордстрема максимальное аналитическое продолжение было получено Грейвсом и Бриллом (1960). Общий метод построения максимального аналитического продолжения для стационарных метрик с горизонтом изложен в работе Уолкера (1970).

**) Через пересечение границ r_- можно из области II сразу попасть в область V'.

ствуют, но пройти из I в IV вдоль времени подобной мировой линии по-прежнему можно.

Возможность подобных "путешествий" породила ряд экзотических гипотез об исходе реального гравитационного коллапса [Новиков (1966а, б*, 1970*), Де ла Круз, Израэль (1967), Бардин (1968)].

Однако, как уже было сказано ранее (см. также гл. 12), из-за неустойчивости решения Керра — Ньюмена внутри черной дыры диаграмма рис. 67 вряд ли имеет какое-либо отношение к действительности.

Границы $r = r_-$ области II получили название горизонтов Коши. Название это связано со следующим обстоятельством. Если провести пространственноподобную гиперповерхность Коши S во всем пространстве I и пространстве I' (и, возможно, через часть области II' или II), как показано на рис. 67, и задать на этой поверхности данные Коши для любых полей или частиц, то эти данные определяют эволюцию полей и движение частиц лишь до границ $r = r_-$. В областях III, III' на эволюцию полей и движение частиц могут влиять источники в этих пространствах, которые задаются независимо от данных на S .

Важной особенностью горизонтов Коши является следующее обстоятельство. Как видно из рис. 67, чем позже какой-либо световой сигнал из области I попадает в II, тем ближе к границе r_- идет его мировая линия. Таким образом, вблизи r_- "скапливаются" мировые линии всех сигналов, попадающих в черную дыру при $t \rightarrow \infty$. Эта концентрация сигналов вдоль $r = r_-$ и является причиной неустойчивости решения Керра — Ньюмена внутри черной дыры по отношению к малым возмущениям (см. гл. 12).

§ 6.6. Обобщения теоремы единственности на случай неэлектромагнитных полей

Приведенные выше теоремы единственности для решений системы уравнений Эйнштейна — Максвелла, описывающих черные дыры, могут быть в значительной мере обобщены и распространены на случай других полей. Здесь мы кратко опишем результаты, относящиеся к существованию у черных дыр "волос", связанных с другими (не электромагнитными) взаимодействиями.

Общий метод анализа возможности существования решений для самосогласованной системы уравнений гравитационного и других физических полей, описывающих стационарное асимптотически плоское пространство, содержащее черную дыру, был развит Бекенштейном (1972 а, б, с). Этот метод состоит в следующем. Пусть, помимо гравитационного, имеется набор физических полей, который мы обозначим φ_A , где область изменения индекса A определяется суммарным числом компонент рассматриваемых полей. Пусть эти поля удовлетворяют уравнениям, вытекающим из действия $S[\varphi_A] = \int \mathcal{L}(\varphi_A, \varphi_{A,\mu}) \sqrt{-g} d^4x$:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{A,\mu}} \right]_{,\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} = 0. \quad (6.6.1)$$

Умножим это уравнение на φ_A , просуммируем по всем A и проинтегрируем

по всей внешней области черной дыры. Если обозначить

$$b^\mu = \sum_A \varphi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{A,\mu}} \quad (6.6.2)$$

и воспользоваться теоремой Стокса, то получим

$$-\int b^\mu d\sigma_\mu + \sum_A \int \left(\varphi_{A,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{A,\mu}} + \varphi_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} \right) \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (6.6.3)$$

Здесь $d\sigma_\mu$ — элемент гиперповерхности, а интегрирование ведется по полной границе внешней области черной дыры, состоящей из горизонта событий, пространственной бесконечности и световых и времениподобных бесконечностей прошлого и будущего.

Далее используется тот факт, что в стационарном случае для массивных полей и для скалярного безмассового поля b^μ достаточно быстро убывает на пространственной бесконечности, а на временной бесконечности и на горизонте величина $b^\mu d\sigma_\mu$ обращается в нуль и первый интеграл в (6.6.3) "зануляется". В том случае, когда подынтегральное выражение второго интеграла является положительно определенным, обращение его в нуль означает обращение в нуль соответствующих полей φ_A , что и доказывает искомый результат об отсутствии "волос" этого поля.

Этот метод позволил Бекенштейну (1972 а, б, с) доказать, что невозможно существование статической черной дыры, вне которой имеются регулярные массивные скалярное, векторное или тензорное поля, описываемые линейными уравнениями без источников. Аналогичный результат справедлив и для стационарных аксиально-симметричных черных дыр в предположении, что метрика удовлетворяет условию циркулярности [Бекенштейн (1972 с)]. К сожалению, в общем случае доказать выполнимость этого условия не удастся. Это является препятствием для проведения полного доказательства на том же уровне строгости, что доказательство теоремы единственности для электровакуумных черных дыр. Можно показать [Бекенштейн (1972 б, с), Чейз (1970)], что черная дыра не должна обладать также "волосами", связанными со скалярным безмассовым полем φ , описываемым уравнением $(\square - \xi R)\varphi = 0$ и убывающим на бесконечности, если только значение φ конечно на горизонте*). Аналогичный результат справедлив также и в скалярно-тензорной теории Бранса — Дикке [Хокинг (1972 б)].

Описанные выше результаты об отсутствии "волос" находятся в полном соответствии с гипотезой Уилера, поскольку для перечисленных полей возможно монопольное излучение. Для безмассового поля Янга — Миллса ситуация иная. Гипотеза Уилера не исключает существования дополнительных монопольных степеней свободы у черной дыры (т.е. зарядов, аналогичных электрическому), связанных с сохранением барионов и лептонов.

) Следует отметить, что если отказаться от условия ограниченности φ , то оказывается возможным построить решение, описывающее экстремальную невращающуюся черную дыру со скалярным безмассовым полем [Бочарова и др. (1970), Бекенштейн (1975)], однако это решение оказывается неустойчивым [Бронников, Киреев (1978)].

В работе Фролова (1973*) было получено решение, описывающее невращающуюся черную дыру, обладающую зарядом поля Янга — Миллса. Позднее Ясский (1975) показал, что для каждого решения уравнений Эйнштейна — Максвелла вне источников можно построить $(N - 1)$ -параметрическое семейство точных решений уравнений Эйнштейна — Янга — Миллса для N -параметрической калибровочной группы, которое обладает той же метрикой, что и исходное решение. Он привел также явный вид всех этих решений в случае вращающейся черной дыры, обладающей зарядом поля Янга — Миллса. Решения, описывающие черную дыру с таким зарядом (при наличии хиггсовского поля), аналогичные решению T' Офта (1974) и Полякова (1974*, 1975*) для монополя, были получены в работах Чо, Фройнда (1975), Нейванхойзена и др. (1976).

Хартль (1972) показал, что нельзя обнаружить лептонный заряд, упавший в черную дыру, изучая силы, создаваемые этим зарядом и связанные с обменом парой нейтрино — антинейтрино. В последнее время оживился интерес к доказательству возможных модификаций теоремы об отсутствии "волос" в рамках теории супергравитации [о черных дырах в теории супергравитации см. Гиббонс (1984)]. Среди полученных здесь результатов следует упомянуть о возможности существования у черных дыр "суперволос" гравитинного поля и появления нового сохраняющегося числа — суперзаряда в качестве параметра, описывающего соответствующее решение. Этот результат был получен Айхельбургом и Гюеном (1981, 1983 а, б), которые показали, что в семействе Керра — Ньюмена такое обобщение допускает только экстремальная рейсснер-нордстремовская дыра, и получили соответствующее решение. Следует отметить, однако, что вопрос о физической значимости подобного решения далек от ясности, поскольку используемое классическое описание фермионного поля, отвечающего гравитинным "волосам", трудно оправдать.

Интересное развитие получил вопрос о "волосах" черной дыры при описании ее в рамках многомерных теорий гравитации типа теорий Калуцы — Клейна [Добиаши, Мэзон (1982), Кодос, Детвилер (1981), Гиббонс (1982, 1984), Поллард (1983), Гиббонс, Вильтшир (1985)]. Исходным пунктом при таком описании является предположение, что пространство-время имеет размерность $n > 4$. Физическое пространство-время возникает в результате компактификации "лишних" $n - 4$ измерений. Исходное тензорное поле g в этом n -мерном пространстве в физическом пространстве-времени проявляется как набор физических полей, определенным образом взаимодействующих с гравитационным полем $g_{\mu\nu}$ и друг с другом. В частности, в простейшем случае (при $n = 5$) в такой теории наряду с гравитационным имеются электромагнитное (A_μ) и скалярное базмассовое (φ) поля, причем, если пятимерная метрика не зависит от "пятой" координаты, то пятимерное действие $\int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} R^{(5)}$ приводит к следующему четырехмерному действию для этих полей:

$$\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - e^2 \sqrt{3} \varphi F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (6.6.4)$$

Нейтральные вращающиеся черные дыры в такой теории описываются стандартной метрикой Керра. Однако, если черная дыра заряжена и имеет

электрический (Q) или магнитный (P) заряд, то, согласно этой теории, она неизбежно обладает и ненулевым скалярным зарядом, однозначно с ним связанным. Наличие "скалярных волос" у такой черной дыры не противоречит общим результатам, приведенным выше. Дело в том, что уравнение скалярного поля φ для действия (6.6.4) содержит дополнительный член, описывающий взаимодействие φ с электромагнитным полем. Величина $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, входящая множителем при $e^2\sqrt{3}\varphi$, в этом уравнении играет роль своеобразного источника для скалярного поля. Явный вид такой метрики в случае, если черная дыра не вращается, приведен в работе Гиббонса, Вильтшира (1985). Обобщение на случай вращающейся черной дыры обсуждается в этой же работе, а также Блейером и др. (1985).

В заключение этой главы обратим еще раз внимание на следующий замечательный факт. Если сравнить теорию поля в плоском пространстве и в теории Эйнштейна, то в результате возрастания сложности уравнений естественно ожидать возрастания трудностей, связанных с их решением. Более того, казалось бы, должно резко возрасти и многообразие решений, если допустить существование черных дыр и связанных с ними изменений причинной структуры пространства-времени. Однако парадоксальным образом, как это было показано выше, происходит обратное. Класс возможных решений резко суживается и допускает при некоторых ограничениях полное описание. Физическая причина этого в том, что гравитационное поле универсально и действует на любую материю, обладающую энергией-импульсом. При возникновении черной дыры гравитация возрастает настолько, что для равновесия физических полей вблизи нее должны выполняться крайне жесткие условия, по сути дела, эквивалентные тому, что полевая конфигурация не обладает степенями свободы, способными распространяться, что и приводит к указанному упрощению общей картины.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

Под электродинамикой черных дыр понимается теория электродинамических процессов, которые могут происходить *вне* горизонта событий, во внешнем пространстве, доступном изучению далеких наблюдателей *).

На первый взгляд электродинамика черных дыр весьма тривиальна. Действительно, в § 4.8 отмечалось, что электромагнитное поле стационарной черной дыры (при заданной массе M) однозначно определяется ее электрическим зарядом Q и параметром вращения a . Если заряженная черная дыра не вращается, то электромагнитное поле сводится к радиальному электрическому полю заряда Q и статично. Какие-либо высшие мультиполи, кроме монополя, отсутствуют.

Если черная дыра вращается, то электромагнитное поле имеет вид (4.8.2). Оно стационарно, но теперь вращение черной дыры, во-первых, индуцирует появление магнитного поля, а во-вторых, искажает геометрию пространства и порождает высшие электрические (и магнитные) моменты в поле. Однако эти высшие моменты однозначно определяются величинами M , a и Q и ни в коей мере не являются независимыми, как это имеет место в случае обычных тел.

В астрофизических условиях электрический заряд черной дыры (как и заряд других небесных тел) не может быть велик (см. § 4.8). Совсем слабым должно быть и магнитное поле: его дипольный магнитный момент равен $\mu^* = Qa$.

Никаких иных стационарных электромагнитных полей, присущих самой черной дыре, быть не может. В этом смысле электродинамика собственных полей черной дыры оказывается значительно бедней, например, электродинамики пульсаров. Пульсар представляет собой быстро вращающуюся нейтронную звезду с массой порядка массы Солнца и гигантским "вмороженным" магнитным полем порядка 10^{12} Гс. Вращение индуцирует большие электрические поля, которые "вырывают" заряды с поверхности звезды, ускоряют их до большой энергии, создают сложную магнитосферу пульсара и приводят к целому комплексу других явлений.

У черной дыры нет ни сильных магнитного и электрического полей, ни поверхности, с которой могут истекать заряды. Поэтому сложные электродинамические процессы здесь невозможны. Однако, если черная дыра помещена во *внешнее* электромагнитное поле и имеются условия для возникновения в ее окрестности зарядов, то ситуация в корне меня-

*) О свойствах электромагнитных полей внутри черной дыры см. § 12.1.

ется и возникает сложная электродинамика. Именно такая электродинамика и имеется в виду, когда говорят об электродинамике черных дыр.

Для астрофизических приложений важен случай внешних магнитных полей (но не электрических) и наличия разреженной плазмы, в которую погружена черная дыра.

§ 7.1. Уравнения Максвелла

Мы будем рассматривать электромагнитные поля на фоне заданной метрики, т.е. будем считать эти поля недостаточно сильными, чтобы обратно влиять на метрику. Обычно в астрофизике это условие выполняется *).

Уравнения электродинамики, записанные в четырехмерном виде, использующие тензор $F_{\alpha\beta}$ (см. Приложение), мало что говорят нашей интуиции, и применение их для решения конкретных, сколько-нибудь сложных задач физики крайне затруднительно. Торн и Макдональд (1982) [см. также Макдональд, Торн (1982)] переписали эти уравнения электродинамики, используя "3 + 1"-расщепление для внешнего пространства-времени вращающейся черной дыры (см. § 4.2). В их формализме используются привычные понятия – напряженность поля, плотность заряда, плотность электрического тока и т.д., "абсолютное" пространство и единое "время". Уравнения электродинамики записаны в виде, аналогичном тому, который они имеют в плоском пространстве-времени в лоренцевой системе отсчета. Это позволяет не только применять хорошо разработанные методы решения электродинамических задач, но, что, пожалуй, еще важнее, "работать" привычным понятиям, используя нашу интуицию, основанную на практике решения задач электродинамики. Кроме того, в цитированных работах используется так называемая "мембранная" трактовка черной дыры. Суть ее заключается в том, что с точки зрения внешнего наблюдателя (не падающего в черную дыру) границу черной дыры во многих случаях можно трактовать как тонкую мембрану, наделенную особыми электромагнитными, термодинамическими и механическими свойствами. Несколько подробнее мы остановимся на такой трактовке в § 7.3 [см. по этому поводу Торн (1986), Прайс, Торн (1986)]. Подчеркнем, что никакой "мембраны" в действительности нет, этим понятием надо пользоваться крайне осторожно и все время помнить, что оно является только условным и удобным для решения некоторых задач. Перечисленные методы позволяют относительно просто применять электродинамику черных дыр в астрофизике, даже для астрофизиков, не являющихся специалистами в релятивистской теории. Обзор этих вопросов см. Торн и др. (1986).

В данном параграфе мы излагаем результаты цитированных выше работ Торна и Макдональда. Все физические величины, о которых пойдет речь, являются трехмерными векторами (или тензорами), которые мы будем характеризовать их положением в "абсолютном" трехмерном пространстве (вне черной дыры) и в абсолютном едином "времени" t (см. § 4.2). Это те величины, которые измеряют с помощью обычных приборов локально невращающиеся наблюдатели (см. § 4.3).

*) О медленном изменении параметров черной дыры вследствие электродинамических процессов см. далее (§ 7.4).

Введем следующие обозначения для электродинамических физических величин, измеряемых локально невращающимися наблюдателями: E — напряженность электрического поля, B — напряженность магнитного поля, ρ_e — плотность электрического заряда, j — плотность электрического тока.

Уравнения Максвелла записываются в следующем виде *):

$$\nabla E = 4\pi\rho_e, \quad (7.1.1)$$

$$\nabla B = 0, \quad (7.1.2)$$

$$\nabla \times (\alpha B) = \frac{4\pi\alpha j}{c} + \frac{1}{c} [\dot{E} + \omega \mathcal{L}_m E - (E \nabla \omega) m], \quad (7.1.3)$$

$$\nabla \times (\alpha E) = -\frac{1}{c} [\dot{B} + \omega \mathcal{L}_m B - (B \nabla \omega) m]. \quad (7.1.4)$$

Здесь $\alpha = d\tau/dt$ [см. (4.3.13)]; m — вектор, направленный вдоль координатных линий φ и имеющий длину $\frac{A^{1/2}}{\rho} \sin \theta$ (это вектор Киллинга, отражающий осевую симметрию пространства-времени; вдали от черной дыры он равен $r \sin \theta e_{\hat{\varphi}}$); $\mathcal{L}_m E$ — производная Ли от E (или B) вдоль вектора m :

$$\mathcal{L}_m E \equiv (m \nabla) E - (E \nabla) m, \quad (7.1.5)$$

описывающая изменение вектора E по отношению к полю вектора m (П. 7) (эта производная равна нулю, когда при смещении на $m d\varphi$ начало и конец вектора E "приклеены" к векторам $m d\varphi$); ω — угловая скорость обращения (по времени t) локально невращающихся наблюдателей [см. (4.3.10)]. Точка означает дифференцирование по t ; ∇ — оператор набла в искривленном "абсолютном" пространстве.

Уравнения (7.1.1)–(7.1.2) имеют обычный вид, в то время как уравнения (7.1.3)–(7.1.4) несколько отличаются от привычных. Отличия заключаются в следующем. Появилась функция α — из-за того, что физическое время течет по-разному в разных точках пространства, а уравнения написаны в терминах глобального "времени" t (напомним, что ускорение F свободного падения в системе отсчета локально невращающихся наблюдателей связано с α соотношением $F = -c^2 \nabla \ln \alpha$). Далее, выражения в квадратных скобках (7.1.3) и (7.1.4) есть производные (по времени) "типа Ли" для совокупности локально невращающихся наблюдателей, которые движутся в абсолютном пространстве и для которых $dx/dt = \omega m$. Таким образом, эти выражения соответствуют полным производным по времени от соответственно E и B с учетом движения локально невращающихся наблюдателей.

Уравнения электродинамики становятся особенно наглядными и удобными для анализа конкретных задач, когда они записаны в интегральной форме [см., например, Пикельнер (1961*)]. Мы приведем здесь одно из таких интегральных выражений (оно потребуется в дальнейшем) для внеш-

*) Имея в виду применимость электродинамических формул этой главы в астрофизике, мы выписываем их в обычной системе единиц, используя c .

него пространства черной дыры: это — закон Фарадея

$$\oint_{\partial A^*(t)} \alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) dl = - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{A^*(t)} \mathbf{B} d\vec{\Sigma}. \quad (7.1.6)$$

Здесь $d\vec{\Sigma}$ — вектор элемента поверхности, равный по длине его площади; $A^*(t)$ — двумерная поверхность, не пересекающая горизонт и ограниченная кривой $\partial A^*(t)$; dl — элемент $\partial A^*(t)$; $\mathbf{v}$ — физическая скорость $A^*(t)$ или $\partial A^*(t)$ относительно локально невращающихся наблюдателей.

§ 7.2. Стационарная электродинамика с осевой симметрией. Бессилловое поле

Вращающаяся черная дыра и пространство вне ее стационарны и обладают осевой симметрией. Во многих астрофизических задачах движение вещества вокруг черной дыры также с хорошей точностью можно считать стационарным и осесимметричным. Естественно предполагать, что и электромагнитное поле будет таким же.

Мы считаем в этом параграфе перечисленные условия выполненными*). Тогда производные по времени t и производные $\mathcal{L}_m$ от векторов исчезают. В частности, в квадратных скобках (7.1.3) и (7.1.4) остаются только последние слагаемые.

Оказывается, что при условии стационарности и осевой симметрии непосредственно измеряемые значения E , B , ρ_e , j выражаются через три произвольные скалярные функции, которые могут быть выбраны следующим образом.

Пусть ∂A^* — замкнутая координатная линия с постоянными r и θ в "абсолютном" 3-пространстве, а A^* — двумерная поверхность, не пересекающая черную дыру и ограниченная ∂A^* .

Тогда указанные функции:

- 1) полный ток внутри петли ∂A^* (взятый с обратным знаком)

$$I \equiv - \int_{A^*} \alpha j d\vec{\Sigma}, \quad (7.2.1)$$

где $d\vec{\Sigma}$ — вектор элемента поверхности (он считается положительным, если ориентирован в направлении π , 0 координаты θ);

- 2) полный магнитный поток через ∂A^*

$$\Psi \equiv \int_{A^*} \mathbf{B} d\vec{\Sigma}; \quad (7.2.2)$$

- 3) электрический потенциал

$$\mathcal{A}_0 \equiv -\alpha \Phi - \omega A m, \quad (7.2.3)$$

где Φ — скалярный, а A — векторный потенциалы (определение m мы уже дали).

*) Случай нестационарного поля см., например, Макдональд, Сюэн (1985), Торн (1986).

Величины I и Ψ зависят только от выбора положения петли ∂A^* и не зависят от формы A^{**} .

Прежде чем выразить E и B через функции $I, \Psi, \mathcal{A}_0$, разделим поля на полоидальные (индекс P) и тороидальные (индекс T) компоненты, соответственно перпендикулярные и параллельные вектору m :

$$E^T \equiv \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{-1} (Em)m, \quad (7.2.4)$$

$$B^T \equiv \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{-1} (Bm)m, \quad (7.2.5)$$

$$E^P = E - E^T, \quad (7.2.6)$$

$$B^P = B - B^T. \quad (7.2.7)$$

Из закона Фарадея (7.1.6) и условия стационарности следует

$$E^T = 0. \quad (7.2.8)$$

Из уравнения (7.1.2) и условия осесимметричности B (что дает $\mathcal{L}_m B = 0$) получаем

$$\nabla B^T = 0, \quad (7.2.9)$$

$$\nabla B^P = 0, \quad (7.2.10)$$

т.е. полоидальные и тороидальные магнитные силовые линии можно рассматривать отдельно (как нигде не кончающиеся).

Плотность тока j также разделим на полоидальную (j^P) и тороидальную (j^T) компоненты.

Теперь мы можем привести выражения для всех электромагнитных величин через $I, \Psi, \mathcal{A}_0$:

$$E^P = \alpha^{-1} \left(\nabla \mathcal{A}_0 + \frac{\omega}{2\pi c} \nabla \Psi \right), \quad (7.2.11)$$

$$E^T = 0, \quad (7.2.12)$$

$$B^P = - \frac{m \times \nabla \Psi}{2\pi \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)}, \quad (7.2.13)$$

$$B^T = - \frac{2Im}{\alpha c \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)}, \quad (7.2.14)$$

$$j^P = \frac{m \times \nabla I}{2\pi \alpha \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)}, \quad (7.2.15)$$

*) Мы считаем, что у черной дыры нет магнитного заряда.

$$j^T \equiv j^T m \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{-1/2} = \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{1/2} \frac{1}{4\pi\alpha} \times \\ \times \left\{ -c \nabla \left[\frac{\alpha \nabla \Psi}{2\pi \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)} \right] + \frac{1}{\alpha} \nabla \omega \left(\nabla \mathcal{A}_0 + \frac{\omega \nabla \Psi}{2\pi c} \right) \right\}, \quad (7.2.16)$$

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi} \nabla \left[\frac{1}{\alpha} \left(\nabla \mathcal{A}_0 + \frac{\omega \nabla \Psi}{2\pi c} \right) \right]. \quad (7.2.17)$$

Подчеркнем, что последние три уравнения можно рассматривать как дифференциальные уравнения для определения I , Ψ , $\mathcal{A}_0$ (а значит, и E , B), если источники поля j^P , j^T и ρ_e считать заданными стационарно и осесимметрично, но в остальном произвольно. Заметим, что задание тока j в стационарном и осесимметричном случае должно удовлетворять условию $\nabla(\alpha j) = 0$ из-за закона сохранения заряда, т.е. αj^P должно быть бездивергентным.

Рассмотрим теперь физические условия в плазме, окружающей черную дыру.

Наиболее важным для астрофизики является случай, когда проводимость плазмы столь высока, что электрическое поле отсутствует в системе, сопутствующей плазме, и магнитные силовые линии "вморожены" в плазму. В этом случае в произвольной системе отсчета электрическое поле перпендикулярно магнитному (вырожденное поле):

$$EB = 0. \quad (7.2.18)$$

Еще более специфична ситуация, когда силы инерции (и гравитации), действующие на плазму, малы по сравнению с электромагнитными. В этом случае конфигурация полей и токов такова, что в системе, сопутствующей плазме, токи параллельны магнитным силовым линиям и отсутствует сила Лоренца, действующая на движущиеся заряды. Такие поля называют бессиловыми. В произвольной системе условие бессилового поля записывается следующим образом:

$$\rho_e E + \frac{1}{c} j \times B = 0. \quad (7.2.19)$$

В этом параграфе мы будем считать, что вблизи черной дыры условие (7.2.19) [а значит, и (7.2.18)] выполнено*). Подчеркнем, что условие (7.2.19) заведомо нарушается где-то во внешнем пространстве черной дыры.

Действительно, в обычной ситуации внешнее магнитное поле удерживается в пространстве около черной дыры из-за того, что концы магнитных силовых линий "вморожены" в достаточно плотную массивную плазму, находящуюся несколько поодаль и "принесшую" магнитное поле к черной дыре. В этой плазме выполнено условие (7.2.18), но не условие (7.2.19). Тяготение черной дыры (и инерция) удерживает эту плазму, а вместе с ней и "вмороженное" в нее магнитное поле. Его силовые линии

*) Условие (7.2.19) не выполняется на самом горизонте событий; см. об этом следующий параграф.

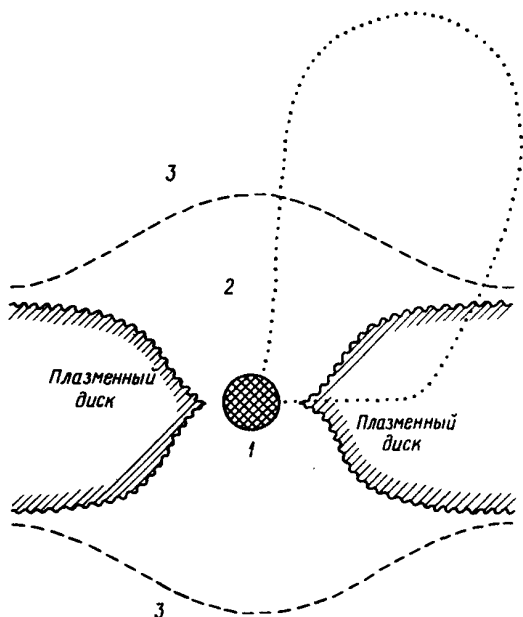


Рис. 68. Схема дисковой аккреции на черную дыру: 1 — вращающаяся черная дыра, 2 — область бессипового поля (7.2.19), 3 — «область ускорения», где не выполняются условия (7.2.18) и (7.2.19). Штриховая линия — граница областей 2 и 3, пунктир — пример линии электрического тока

выходят из плотной плазмы в область гораздо более разреженной плазмы, где выполнено условие (7.2.19); они могут проходить вблизи черной дыры, а часть их — пронизывать ее. Такая ситуация осуществляется, например, в модели широко обсуждаемой дисковой аккреции на черную дыру (рис. 68).

Если бы где-то не нарушалось условие (7.2.19) и плотная плазма своей инерцией не сдерживала бы расталкивающее давление магнитного поля, то это давление заставило бы силовые линии вместе с разреженной плазмой двигаться наружу.

Вдали от черной дыры должно нарушаться, вероятно, и условие (7.2.18) (область 3 на рис. 68) — там, где магнитное поле достаточно слабо, а силы инерции, наоборот, становятся большими (см. об этом следующий параграф).

Заметим, наконец, что условия (7.2.18) и (7.2.19), конечно, только приближенные. Для решения задач о конфигурации полей, токов и распределения зарядов необходимо лишь, чтобы вместо (7.2.18) и (7.2.19) выполнялись соответственно неравенства

$$|EB| \ll |E^2 - B^2|, \quad (7.2.20)$$

$$\left| \rho_c E + \frac{1}{c} j \times B \right| \ll \left| \frac{j}{c} \right| |B|. \quad (7.2.21)$$

Малые отклонения от точных равенств (7.2.18) и (7.2.19) в окрестности черной дыры могут оказаться существенными для некоторых астрофизических процессов [см., например, Кардашев и др. (1983*)].

Вернемся к случаю бессилового поля, считая условия (7.2.18) и (7.2.19) точно выполненными в окрестности черной дыры. Поле E — чисто полоидальное, и, кроме того, $EB = 0$. Поэтому E можно представить как векторное произведение B^P на некоторый вектор $-\mathbf{v}^F/c$, зависящий только от r , θ и параллельный m :

$$E \equiv E^P = -\frac{\mathbf{v}^F}{c} \times B^P. \quad (7.2.22)$$

Напомним, что E и B — это поля, измеряемые невращающимися наблюдателями. Тогда из (7.2.22) следует, что наблюдатель, движущийся со скоростью $\mathbf{v}^F$ относительно невращающихся наблюдателей, измеряет только магнитное поле, для него электрическое поле равно нулю вследствие преобразования Лоренца. Значит, можно интерпретировать $\mathbf{v}^F$ как линейную скорость точек магнитной силовой линии относительно невращающихся наблюдателей. Поле E целиком индуцировано этим движением.

Если записать вектор $\mathbf{v}^F$ в виде

$$\mathbf{v}^F = \left(\frac{\Omega^F - \omega}{\alpha} \right) m, \quad (7.2.23)$$

то Ω^F будет угловой скоростью вращения точек силовых линий полоидального магнитного поля в "абсолютном" пространстве. Можно показать, что каждая силовая линия целиком обращается вокруг черной дыры как единое целое с постоянной Ω^F по "времени" t в "абсолютном" пространстве.

Поверхность, которая получается при вращении магнитной силовой линии вокруг оси симметрии, называют *магнитной поверхностью*. Величина Ψ , очевидно, постоянна на этой поверхности, и, следовательно, Ω^F есть функция Ψ : $\Omega^F = \Omega^F(\Psi)$. Оказывается, что величина $\mathcal{A}_0$ теперь не является независимой, а тоже есть функция Ψ : $\frac{d\mathcal{A}_0}{d\Psi} = -\frac{\Omega^F}{2\pi c}$. Мож-

но показать, что из условия (7.2.19) вытекает зависимость и I от Ψ .

Уравнения для j^T (7.2.16) и ρ_e (7.2.17) теперь несколько упрощаются:

$$j^T = \left(\frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^{1/2} \frac{1}{8\pi^2 \alpha} \left[-c \nabla \left(\frac{\rho^2 \alpha \nabla \Psi}{A \sin^2 \theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha c} (\Omega^F - \omega) \nabla \Psi \nabla (\Omega^F - \omega) - \frac{1}{\alpha c} (\Omega^F - \omega) \frac{d\Omega^F}{d\Psi} (\nabla \Psi)^2 \right], \quad (7.2.24)$$

$$\rho_e = -\frac{1}{8\pi^2 c} \nabla \left[\left(\frac{\Omega^F - \omega}{\alpha} \right) \nabla \Psi \right]. \quad (7.2.25)$$

Наиболее важным и примечательным фактом является то, что I , Ψ , $\mathcal{A}_0$ теперь не являются произвольными и независимыми, а значит, не явля-

ются произвольными и независимыми ρ_e , j^T и бездивергентная часть αj^P , как это было при требовании лишь стационарности и осевой симметрии. Теперь произвол в их выборе отсутствует: для существования бессилового поля необходимо (и достаточно), чтобы величина Ψ удовлетворяла уравнению, которое называют *уравнением линий тока* (stream equation):

$$\nabla \left\{ \frac{\alpha \rho^2}{A \sin^2 \theta} \left[1 - \frac{(\Omega^F - \omega)^2}{\alpha^2 c^2} \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] \nabla \Psi \right\} + \frac{(\Omega^F - \omega)}{\alpha c^2} \frac{d\Omega^F}{d\Psi} (\nabla \Psi)^2 + \frac{16\pi^2 \rho^2}{\alpha c^2 A \sin^2 \theta} I \frac{dI}{d\Psi} = 0. \quad (7.2.26)$$

Таким образом, если Ψ , $\Omega^F(\Psi)$ и $I(\Psi)$ выбраны так, что удовлетворяют (7.2.26), то для области с бессильным полем E вычисляется по (7.2.22), куда подставлены (7.2.23) и (7.2.13), B вычисляется по (7.2.13) и (7.2.14), j^P — по (7.2.15), а j^T и ρ_e — по (7.2.24) и (7.2.25) соответственно.

§ 7.3. Граничные условия на горизонте событий.

Мембранная трактовка и "растянутый" горизонт

Электродинамика черных дыр рассматривает процессы только вне горизонта событий. Поэтому для решения уравнений электродинамики, помимо граничных условий вдали от черной дыры, необходимо задать еще граничные условия на ее поверхности. Формально эта ситуация ничем не отличается от ситуации, например, связанной с электродинамикой пульсаров, когда также необходимо задавать граничные условия на поверхности нейтронной звезды.

Тем не менее эти ситуации принципиально разные.

В отличие от нейтронной звезды, у черной дыры нет никакой материальной поверхности, отличающейся от окружающего пространства. Формально для построения полной картины электромагнитного поля надо было бы решать уравнения Максвелла для всего пространства-времени — как снаружи, так и внутри черной дыры, причем без каких-либо специальных условий на горизонте событий. Соответствующие условия надо было бы отнести к сингулярности внутри черной дыры.

Однако ясно, что если мы интересуемся только процессами вне черной дыры и помним, что область пространства-времени внутри нее не может влиять на эти процессы, то должна существовать корректная постановка задачи об электродинамике вне черной дыры с соответственно подобранными граничными условиями на горизонте событий. Так как генераторами горизонта событий являются нулевые геодезические и эти же линии являются характеристиками для уравнений Максвелла, то, следовательно, решается задача с заданием условий на семействе характеристик.

Соответствующие граничные условия были сформулированы Знаком (1978) и Дамуром (1978). Оказалось, что их можно представить весьма наглядным образом, а именно считать, что на поверхности черной дыры находится *фиктивный* поверхностный электрический заряд σ^H , компенсирующий поток электрического поля через поверхность, и *фиктивный* поверхностный электрический ток $\mathcal{J}^H$, замыкающий реальные токи,

пересекающие горизонт, и компенсирующий касательные составляющие магнитные поля на горизонте. Такая трактовка получила название мембранного формализма [Торн (1986), Торн и др. (1986)].

В формулировке Макдональда и Торна (1982) условия на горизонте выглядят следующим образом:

закон Гаусса

$$E_{\perp} \equiv E_{\perp} \rightarrow 4\pi\sigma^H, \quad (7.3.1)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности черной дыры; знак $\rightarrow$ означает приближение к ее горизонту по траектории свободно падающего наблюдателя;

закон сохранения заряда

$$\alpha j_{\perp} \rightarrow -\frac{\partial \sigma^H}{\partial t} - (2) \nabla_{\vec{y}}^H, \quad (7.3.2)$$

где $(2) \nabla$ — двумерная дивергенция на горизонте;

закон Ампера

$$\alpha B_{\parallel} \rightarrow B^H \equiv \left(\frac{4\pi}{c} \right) \vec{y}^H \times \mathbf{n}, \quad (7.3.3)$$

где $B_{\parallel}$ — компонента магнитного поля, касательная к горизонту;

закон Ома

$$\alpha E_{\parallel} \rightarrow E^H \equiv R^H \vec{y}^H, \quad (7.3.4)$$

где $E_{\parallel}$ — компонента электрического поля, касательная к горизонту; $R^H \equiv 4\pi/c$ — эффективное поверхностное сопротивление горизонта событий ($R^H = 377$ Ом).

Наличие множителя α в условиях (7.3.2)–(7.3.4) связано с замедлением течения физического времени у локально невращающихся наблюдателей вблизи черной дыры.

Значения E^H и B^H конечны, а $\alpha \rightarrow 0$ на горизонте. Отсюда и из приведенных выше условий получаем следующие свойства полей у горизонта:

$$E_{\perp} \text{ и } B_{\perp} \text{ конечны на горизонте,} \quad (7.3.5)$$

$$|E_{\parallel}| \text{ и } |B_{\parallel}|, \text{ вообще говоря, расходятся у горизонта как } 1/\alpha. \quad (7.3.6)$$

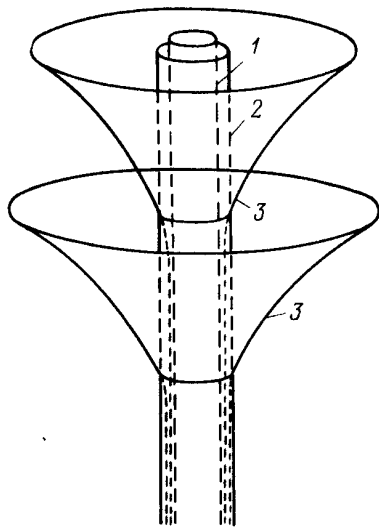
$$|E_{\parallel} - \mathbf{n} \times B_{\parallel}| \propto \alpha \rightarrow 0 \text{ у горизонта.} \quad (7.3.7)$$

Условие (7.3.7) означает, что для локально невращающихся наблюдателей электромагнитное поле у горизонта приобретает (в общем случае) характер электромагнитной волны, идущей в черную дыру с бесконечным фиолетовым смещением.

Приведенные условия позволяют весьма наглядно представить, как электромагнитные процессы будут влиять на свойства самой черной дыры, медленно меняя ее параметры (медленно — поскольку мы с самого начала предположили относительную слабость электромагнитного поля; см. § 7.1).

Изменение углового момента вращения черной дыры J равно полному потоку углового момента электромагнитного поля через горизонт (все —

Рис. 69. "3 + 1"-расщепление пространства-времени вблизи горизонта черной дыры: 1 — горизонт черной дыры, 2 — "растянутый" горизонт, 3 — сечения $t = \text{const}$



в глобальном времени t). В дифференциальном виде это условие записывается так:

$$dJ = (\sigma^H E^H + (\vec{y}^H/c) \times B_1) m d\Sigma^H dt. \quad (7.3.8)$$

Здесь $d\Sigma^H$ — элемент площади горизонта. Изменение массы черной дыры M определяется следующим выражением:

$$dM \cdot c^2 = \{ \Omega^H [\sigma^H E^H + (\vec{y}^H/c) \times B_1] m + E^H \vec{y}^H \} d\Sigma^H dt. \quad (7.3.9)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках описывает изменение вращательной энергии черной дыры, а второе — изменение массы вследствие "нагрева" черной дыры поверхностным током.

Мы видим, что описанные в этом параграфе граничные условия на горизонте событий позволяют при решении электродинамических задач во внешнем пространстве представлять черную дыру как некую материальную сферу, обладающую вполне определенными электромагнитными свойствами, способную нести поверхностные заряды и токи. Этот подход, как мы уже сказали, называют мембранным.

Такое наглядное представление в сильной степени помогает решать конкретные задачи.

Мы хотим еще раз подчеркнуть, что в действительности никакой реальной сферы, никаких зарядов и токов на границе черной дыры нет. Подчеркнем также, что поля E и B , которые реально измеряет локально не вращающийся наблюдатель у горизонта событий, кардинально отличаются от E^H и B^H , фигурирующих в граничных условиях, из-за наличия множителя α в определении E^H и B^H [см. (7.3.3) и (7.3.4)]. Этот множитель связан (как и при формулировке уравнений Максвелла) с использованием "глобального времени" t .

Отметим здесь следующее важное обстоятельство. При "3 + 1"-расщеплении пространства-времени черной дыры поверхности $t = \text{const}$ ведут себя так, как показано на рис. 69. С приближением к горизонту они уходят в далекое прошлое по параметру V (2.4.11) или по времени T свободно падающего наблюдателя (T — время системы отсчета (2.4.3) для метрики Шварцшильда или аналогичной системы отсчета для метрики Керра)*).

* Заметим, что метрическое расстояние до горизонта от любой точки по сечению $t = \text{const}$ тем не менее конечно (кроме случая $a = M$). Это связано с тем, что нулевые геодезические стремятся стать параллельными этому сечению с приближением к горизонту.

Поэтому с приближением к горизонту на этом сечении имеются значения электромагнитного поля, соответствующие далекой прошлой истории. Если рассматривается стационарная задача, то это обстоятельство не имеет значения, так как поля не меняются со временем. Но при рассмотрении эволюции полей это обстоятельство оказывается важным и может вызывать серьезные неудобства. Поэтому было предложено ввести понятие "растянутого" горизонта. Им называют поверхность (мембрану), лежащую в непосредственной близости от горизонта, снаружи него, и, в отличие от горизонта, являющуюся времениподобной (см. рис. 69). Точно положение "растянутого" горизонта не определено и выбирается в зависимости от конкретной задачи.

Граничные условия задаются в таком подходе на "растянутом" горизонте и все далекое прошлое полей на $t = \text{const}$ вблизи истинного горизонта оказывается отсеченным и не рассматривается. Подробную теорию "растянутого" горизонта и библиографию можно найти в работе Прайса, Торна (1986) и в книге Торн и др. (1986).

Вернемся к истинному горизонту. Будем теперь, как и в предыдущем параграфе, "специализировать" физические условия. Предположим сначала, что рассматривается стационарная осесимметричная задача. В этом случае на горизонте фиктивный поверхностный ток $\vec{\mathcal{J}}^H$ и электрическое поле E^H полностью полоидальны, а магнитное поле B^H тороидально:

$$\vec{\mathcal{J}}_P^H = \frac{I}{2\pi \left(\frac{A^H \sin^2 \theta}{\rho_H^2} \right)^{1/2}}, \quad (7.3.10)$$

$$E_P^H = - \frac{2I}{c \left(\frac{A^H \sin^2 \theta}{\rho_H^2} \right)^{1/2}}, \quad (7.3.11)$$

$$B_T^H = - \frac{2I}{c \left(\frac{A^H \sin^2 \theta}{\rho_H^2} \right)^{1/2}}, \quad (7.3.12)$$

где A^H и ρ_H — значения A и ρ на горизонте. Кроме того, полоидальное магнитное поле, измеряемое невращающимися наблюдателями, пересекает горизонт событий ортогонально. Напомним, что тороидальная компонента, как сказано выше, расходится на горизонте.

Посмотрим теперь, что изменится в случае бессилового поля в окрестности черной дыры. Прежде всего отметим, что на самом горизонте условие (7.2.18) вырожденности поля выполняется, но условие (7.2.19) — нет.

Теперь электрическое поле на горизонте E^H прямо выражается через $B_\perp$:

$$E^H = - \frac{1}{c} (\Omega^F - \Omega^H) m \times B_\perp. \quad (7.3.13)$$

Наиболее важным является следующий факт. В случае бессилового поля решения уравнения линий тока (7.2.26), не имеющие каких-либо нефизических особенностей, автоматически удовлетворяют граничным условиям

на горизонте событий. Кроме того, оказывается справедливым следующий "принцип наименьшего действия".

Линии полоидального магнитного поля, пересекающие горизонт, распределяются таким образом, чтобы полная поверхностная энергия & тангенциального электромагнитного поля на горизонте была экстремальной. Выражение для & в этом случае имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi H} \int [(B^H)^2 + (E^H)^2] d\Sigma^H, \quad (7.3.14)$$

а интегрирование производится по горизонту.

Наконец, запишем для бессилового поля уравнения (7.3.8) и (7.3.9):

$$dJ = \frac{(\Omega^F - \Omega^H)}{4\pi c} \frac{A^H \sin^2 \theta}{\rho_H^2} (B_1)^2 d\Sigma^H dt, \quad (7.3.15)$$

$$dM = \frac{\Omega^F(\Omega^F - \Omega^H)}{4\pi c^3} \frac{A^H \sin^2 \theta}{\rho_H^2} (B_1)^2 d\Sigma^H dt. \quad (7.3.16)$$

Угловой момент и энергия, теряемые черной дырой, передаются вдоль магнитных силовых линий полоидального поля в бессиловой области к "районам", где условие (7.2.19) нарушается.

Заметим, что если $\Omega^F = 0$ (силовые линии магнитного поля, скажем, заморожены в плазму вдали от черной дыры, и эта плазма не участвует во вращении вокруг нее), то $dM = 0$, т.е. полная масса дыры сохраняется, а $dJ < 0$, т.е. вращение черной дыры замедляется. При этом вся энергия вращения переходит в массу самой черной дыры (так называемую неприводимую массу; см. § 8.1) — ничего не отдается наружу.

При заданных параметрах черной дыры угловая скорость вращения Ω^F определяется граничным условием вдали от черной дыры, во внешней плазме. Для астрофизических условий ситуация будет рассмотрена в § 7.5.

§ 7.4. Электромагнитные поля в вакууме в окрестности черных дыр

Прежде чем переходить к описанию магнитосферы вращающейся черной дыры, возникающей в условиях, когда на нее происходит аккреция замагниченного газа (см. об этом следующий параграф), приведем в качестве иллюстраций решения следующих задач об электромагнитном поле в вакууме:

1) электрический заряд в вакууме в метрике Шварцшильда [Копсон (1928), Лине (1976), Ханни, Руффини (1973)];

2) магнитное поле в вакууме в метрике Керра, однородное на бесконечности [Уолд (1974b), Торн, Макдональд (1982), Кинг, Лазота (1977)].

Начнем с задачи 1. Пусть заряд q покоится в координатах Шварцшильда при $r = b$, $\theta = 0$. Задача сводится к решению системы (7.2.15)–(7.2.17) с δ -функцией для ρ_e и $j^P = j^T = 0$. Условия (7.2.15), (7.2.16) выполняются при $\Psi = I = 0$. Из (7.2.13) и (7.2.14) следует тогда отсутствие внешнего магнитного поля. Отсутствуют и внешние токи. Тем самым [см. выражения (7.3.2) и (7.3.3)] равен нулю поверхностный ток на

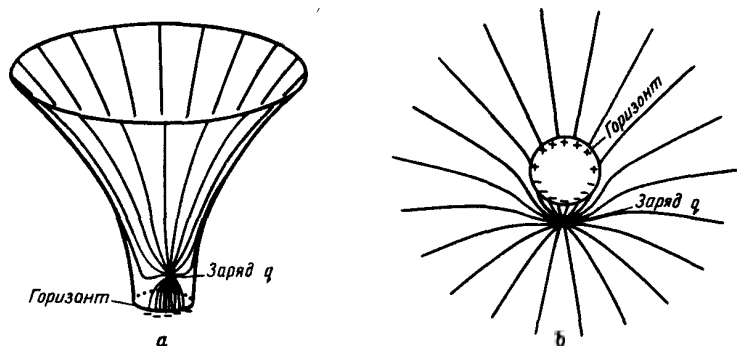


Рис. 70. Силовые линии электрического поля пробного покоящегося заряда q в метрике Шварцшильда в сечении $\varphi = \text{const}$: а) силовые линии на искривленной поверхности, геометрия которой совпадает с сечением $\varphi = \text{const}$ метрики Шварцшильда; в) то же самое в проекции на плоскость ("вид сверху"). На горизонте изображено распределение фиктивного поверхностного заряда σ^H . Заряд q считается положительным

горизонте ($\mathcal{U}^H = 0$). Из условия (7.3.7) следует, что $E_{\parallel} \rightarrow 0$ у горизонта и электрические силовые линии пересекают его ортогонально. Полный поток E через горизонт равен нулю (черная дыра не заряжена). С этими граничными условиями решение (7.2.17) с $\rho_e = \delta(r - b, \theta)q$ и $\omega = 0$ позволяет найти $\mathcal{A}_0$, а затем из (7.2.11) найти E^P (в этом параграфе везде, кроме окончательных формул, положено $G = 1$, $c = 1$):

$$E^P = \frac{q}{br^2} \left\{ M \left(1 - \frac{b - M + M \cos \theta}{D} \right) + \frac{r[(r - M)(b - M) - M^2 \cos \theta]}{D^3} [r - M - (b - M) \cos \theta] \right\} e_{\hat{r}} + \frac{q(b - 2M)(1 - 2M/r)^{1/2} \sin \theta}{D^3} e_{\hat{\theta}}, \quad (7.4.1)$$

где $e_{\hat{r}}$, $e_{\hat{\theta}}$ — единичные физические векторы вдоль направлений r и θ соответственно, а

$$D \equiv [(r - M)^2 + (b - M)^2 - M^2 - 2(r - M)(b - M) \cos \theta + M^2 \cos^2 \theta]^{1/2}. \quad (7.4.2)$$

Картина электрических силовых линий изображена на рис. 70. На границе черной дыры поверхностная плотность заряда определяется (7.3.1):

$$\sigma^H = \frac{q[M(1 + \cos^2 \theta) - 2(b - M) \cos \theta]}{8\pi b[b - M(1 + \cos \theta)]^2}. \quad (7.4.3)$$

Будем приближать заряд к горизонту ($b \rightarrow 2M$). На расстоянии $r \gg b - 2M$ от горизонта силовые линии становятся практически радиальными, а напряженность поля стремится к q/r^2 . Таким образом, общая картина, за исключением узкой области вблизи горизонта, выглядит так, как будто заряд находится в центре черной дыры.

Приведем теперь без подробного обоснования решение второй задачи. Вращающаяся черная дыра помещена в однородное на бесконечности магнитное поле напряженности B_0 . В метрике Керра магнитное поле дается следующим выражением:

$$B = \frac{B_0}{2\rho \sin \theta} \left(\frac{\Delta}{A} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (7.4.4)$$

где $x \equiv (A - 4a^2 Mr) \sin^2 \theta / \rho^2$.

Электрическое поле, индуцируемое вращением черной дыры, пропорционально a :

$$E = \frac{-B_0 a A^{1/2}}{\rho^3} \left\{ \Delta^{1/2} \left[\frac{\partial \left(\frac{\rho^2 \Delta}{A} \right)}{\partial r} + \frac{M \sin^2 \theta}{\rho} \times \right. \right. \\ \times (A - 4a^2 Mr) \frac{\partial \left(\frac{r}{A} \right)}{\partial r} \left. \right] \frac{\partial}{\partial r} + \Delta^{-1/2} \left[\frac{\partial \left(\frac{\rho^2 \Delta}{A} \right)}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} (A - 4a^2 Mr) \frac{\partial \left(\frac{1}{A} \right)}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}. \quad (7.4.5)$$

Как и в задаче 1, здесь отсутствуют E^H , B^H и y^H *). Из формул (7.3.8), (7.3.9) следует, что угловой момент вращения черной дыры J и ее масса M остаются неизменными. Кинг и Лазота (1977) показали, что при магнитном поле, наклоненном к оси черной дыры, величина ее углового момента будет меняться. Их рассуждения заключаются в следующем.

Пусть однородное на бесконечности магнитное поле B составляет некоторый угол с направлением углового момента J . Разложим J на компоненты — параллельную полю ($J_{\parallel}$) и перпендикулярную ему ($J_{\perp}$). Их изменение с течением времени дается формулами

$$J_{\parallel} = \text{const}, \quad (7.4.6)$$

$$J_{\perp} = J_{\perp}(t=0) e^{-t/\tau}, \quad (7.4.7)$$

где

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{c^5}{G} M^{-1} (B)^{-2} = 10^{36} \text{ лет} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1} \left(\frac{B}{10^{-5} \text{ Гс}} \right)^{-2}. \quad (7.4.8)$$

Таким образом, с течением времени полностью теряется компонента $J_{\perp}$ углового момента черной дыры. При статическом внешнем магнитном поле энергия вращения, связанная с $J_{\perp}$, переходит в "неприводимую" массу черной дыры, а компонента $J_{\parallel}$ не меняется.

) Если вычислить (см. § 7.3) компоненты поля $E_{\perp}$ и $B_{\perp}$ на горизонте событий, то оказывается, что обе они пропорциональны $r_+ - M$, где $r_+ = M + (M^2 - a^2)^{1/2}$. Поэтому для максимально быстро вращающейся черной дыры с $a_{\text{max}} = M$ имеем $E_{\perp} = 0$ и $B_{\perp} = 0$ на горизонте, т.е. силовые линии осесимметричного поля не пронизывают черную дыру (случай неосесимметричного поля см. далее). Задачи электродинамики черных дыр рассматривали также Лейт, Лине (1976, 1978), Мизра (1977), Галыцов, Петухов (1978), Лине (1976, 1977a, b, 1979), Демянский, Новиков (1982), Бичак, Дворак (1980); см. также §§ 8.2–8.4.

Конечное состояние черной дыры соответствует теореме Хокинга о том, что стационарное состояние должно быть осесимметричным. Пресс (1972) отметил, что если внешнее магнитное (или любое другое) поле неосесимметрично, то черная дыра в конце концов полностью потеряет свой угловой момент J согласно теореме Хокинга. При этом, если поле B плавно меняется на масштабах, много больших размеров черной дыры, то можно снова разложить J на $J_{\parallel}$ и $J_{\perp}$ относительно направления поля в ее окрестности. Уменьшение $J_{\perp}$ по-прежнему определяется по порядку величины формулой (7.4.7), а уменьшение $J_{\parallel}$ оценивается формулой

$$\frac{dJ_{\parallel}}{dt} \approx -\frac{J_{\parallel}}{\tau} O\left(\frac{r_g}{R}\right), \quad (7.4.9)$$

где R — масштаб неоднородности поля.

В сноске на с. 149 отмечалось, что в случае $a = a_{\max}$ осесимметричное магнитное поле не пронизывает горизонт черной дыры. Бичак (1983, 1985) показал, что в случае наклонного к оси вращения однородного на бесконечности магнитного поля B_0 поток через половину*) горизонта компоненты поля $B_{0\perp}$ максимален при $a = a_{\max}$ и равен

$$\tilde{\Phi}_{\max} \approx 2,25 B_{0\perp} \pi M^2. \quad (7.4.10)$$

Наконец, рассмотрим *невозвращающуюся* черную дыру, помещенную в однородное на бесконечности сильное магнитное поле B_0 [Бичак, (1983)]. Пусть оно настолько сильное, что необходимо учитывать его самогравитацию. Тогда оказывается, что для фиксированной массы черной дыры M существует такое критическое $B_{0\text{кр}}$, при котором поток Φ через половину горизонта событий максимален:

$$B_{0\text{кр}} = 2c^4 G^{-3/2} M^{-1} = 5 \cdot 10^{13} \text{ Гс} \cdot \left(\frac{10^6 M_{\odot}}{M} \right), \quad (7.4.11)$$

$$\tilde{\Phi}_{\max,1} = 4\pi G^{1/2} M. \quad (7.4.12)$$

Потока поля через горизонт, большего, чем $\tilde{\Phi}_{\max,1}$, быть не может.

§ 7.5. Магнитосфера черной дыры

Задачи, рассмотренные в предыдущем параграфе, иллюстрируют важные свойства электрических и магнитных полей в окрестности черных дыр. Однако эти задачи вряд ли непосредственно приложимы к описанию реальных электродинамических процессов, которые должны протекать в астрофизических условиях. Причина этого, как уже отмечалось, состоит в том, что в окрестности черной дыры поля не могут рассматриваться как вакуумные — всегда имеется разреженная плазма (и поле становится бессиловым) или же возникают еще более сложные ситуации.

*) Полный поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность, в том числе и горизонт, конечно, равен нулю (см. § 7.1). Когда говорят о потоке поля, пронизывающего дыру, рассматривают только входящие (или выходящие) силовые линии.

Напомним, что в случае вращающихся замагниченных нейтронных звезд — пульсаров поля в их окрестности также нельзя рассматривать как вакуумные — возникает сложная магнитосфера пульсара [см. Гольд-райх, Юлиан (1969), Рудерман, Сюзерленд (1975), Аронс (1983), Бескин и др. (1983), Кардашев и др. (1984*), Гуревич, Истомин (1985*)].

По аналогии с пульсарами область вокруг черной дыры с замагниченной плазмой называют *магнитосферой* черной дыры. Полной ее теории пока не существует ввиду сложности и многообразия процессов, которые могут в ней возникать. Более того, сегодня отсутствует сколько-нибудь законченная теория магнитосферы пульсаров, на создание которой потрачено очень много сил и времени.

Мы не будем здесь обсуждать все стороны теории магнитосферы черных дыр, а лишь рассмотрим важнейшие аспекты электродинамических процессов, которые могут возникать в их окрестности и являться специфическими именно для черных дыр. Поэтому мы ограничимся изложением теории простейшей магнитосферы черной дыры, затрагивая лишь процессы, вызываемые самой черной дырой, и оставляя в стороне процессы, связанные, например, с движением облаков плазмы в аккреционном газовом диске, который может существовать вокруг черной дыры, и т.д.

Мы будем рассматривать стационарную осесимметричную модель магнитосферы черной дыры, подвергающейся дисковой аккреции замагниченного газа (схема магнитосферы показана на рис. 68). Такая модель была рассмотрена Блендфордом (1976), Блендфордом, Знаеком (1977), Макдональдом, Торном (1982), Финнеем (1983); см. также Лавлейс (1976), Лавлейс и др. (1979), Торн, Блендфорд (1982), Рис и др. (1982).

Чтобы в окрестности черной дыры выполнялись условия существования бессилового поля (7.2.20)–(7.2.21), необходимо наличие разреженной плазмы, в которой текут токи вдоль магнитных силовых линий. На магнитных силовых линиях, пронизывающих черную дыру, заряды, обеспечивающие токи, должны все время возобновляться, так как они стекают в нее. Вытекать из черной дыры заряды, разумеется, не могут*). Таким образом, в окрестности черной дыры должны существовать механизмы рождения свободных зарядов. Такие механизмы рассмотрены Блендфордом и Знаеком (1977) и Кардашевым и др. (1983*). Не останавливаясь на них, заметим только, что для их осуществления необходимо наличие малой компоненты электрического поля, параллельной магнитному. Эта компонента столь мала, что не нарушает неравенства (7.2.20)–(7.2.24).

Рассмотрим тонкую трубку силовых линий, пронизывающих черную дыру. Эта трубка обращается с постоянной угловой скоростью Ω^F вокруг нее (§ 7.2). При этом, согласно формуле (7.3.16), извлекается вращательная энергия черной дыры

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -c^2 \frac{dM}{dt} = \frac{\Omega^F(\Omega^H - \Omega^F)}{4\pi c} \frac{A^H \sin^2 \theta}{\rho_H^2} B_1^2 d\Sigma^H. \quad (7.5.1)$$

Эта энергия передается вдоль магнитных силовых линий в район 3 (см.

*) Полный заряд черной дыры, естественно, все время равен нулю в стационарном решении, так как полное количество зарядов противоположного знака, втекающих в черную дыру, одинаково.

рис. 68), где нарушается условие бессилового поля, происходит перекачка энергии в ускоренные частицы, излучение и т.д.

Частицы в этом районе своей инерцией оказывают обратное действие на силовую линию и тем самым определяют Ω^F . Если инерция велика, то угловая скорость Ω^F мала ($\Omega^F \ll \Omega^H$) и в пределе $\Omega^F \rightarrow 0$. В этом случае мощность $d\mathcal{E}/dt$ рассматриваемой "машины", как следует из (7.5.1), очень мала. В противоположном случае (малая инерция частиц в области 3) $\Omega^F \rightarrow \Omega^H$, и снова из (7.5.1) получаем малую мощность.

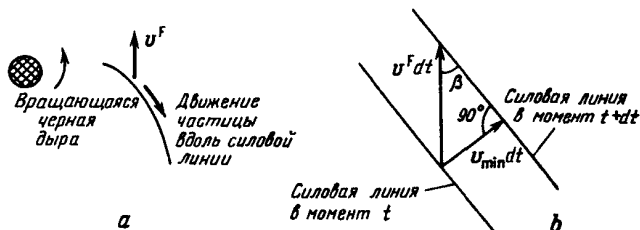


Рис. 7.1а. Схема движения заряженной частицы вдоль силовой линии магнитного поля, вращающейся вокруг черной дыры

Рис. 7.1б. Положение отрезка силовой линии магнитного поля в плоскости векторов B^P и B^T в моменты t и $t + dt$. Если вектор скорости частицы в абсолютном пространстве, скользящей наружу вдоль силовой линии, перпендикулярен к ней, то скорость частицы минимальна

Наибольшая мощность получается при $\Omega^F = \Omega^H/2$.

Макдональд и Торн (1982) показали, что, вероятно, именно это условие реально осуществляется в данной модели. Их аргументы сводятся к следующему. Вдали от черной дыры можно считать угловую скорость невращающихся наблюдателей нулевой, и точки силовых линий вдали от оси симметрии имеют (относительно невращающихся наблюдателей, а значит, в абсолютном пространстве, так как $\omega = 0$) скорость v^F много больше световой:

$$|v^F| = |\Omega^F m| \gg c. \quad (7.5.2)$$

Заряженные частицы не могут двигаться со скоростью больше c . Однако, оставаясь на силовой линии и скользя вдоль нее наружу (как показано на рис. 7.1а), они могут иметь скорость меньше $|v^F|$. Участок силовой линии изображен на рис. 7.1б в плоскости, определяемой векторами B^P и B^T . Существует оптимальный темп скольжения вдоль силовой линии (которая в свою очередь движется со скоростью v^F) такой, что полная скорость частицы в абсолютном пространстве минимальна (это ясно из рис. 7.1б). Угол β есть угол между направлением силовой линии и направлением φ -координаты, поэтому он определяется из соотношения

$$\sin \beta = \frac{|B^P|}{\sqrt{(B^P)^2 + (B^T)^2}}. \quad (7.5.3)$$

С помощью (7.5.3) находим $|v_{\min}|$:

$$|v_{\min}| = \frac{v^F}{\sqrt{1 + (B^T)^2/(B^P)^2}}. \quad (7.5.4)$$

Оказывается, что условие $|v_{\min}| \approx c$ эквивалентно условию наибольшей мощности $\Omega^F \approx \Omega^H/2$. Действительно, запишем для $|v^F|$, $|B^T|$ и $|B^P|$ следующие выражения, справедливые *вдали от черной дыры и оси симметрии*. Для $|v^F|$ имеем

$$|v^F| \approx \Omega^F |m|. \quad (7.5.5)$$

Для $|B^T|$, используя формулы (7.2.14), (7.3.11), (7.3.13) и определение (7.2.2), получаем

$$|B^T| \approx \frac{(\Omega^H - \Omega^F)\Psi}{\pi c |m|}. \quad (7.5.6)$$

Наконец, для $|B^P|$ из формулы (7.2.13) и соотношения $|\nabla \Psi| \approx 2\Psi/|m|$ находим

$$|B^P| \approx \frac{\Psi}{\pi |m|^2}. \quad (7.5.7)$$

Подставляя (7.5.5)–(7.5.7) в (7.5.4), получаем

$$|v_{\min}| \approx \frac{c \Omega^F}{\Omega^H - \Omega^F}. \quad (7.5.8)$$

Из последней формулы следует, что $|v_{\min}| \approx c$, когда $\Omega^F = \Omega^H/2$. Если $\Omega^F \ll \Omega^H/2$ и $|v_{\min}| \ll c$, то инерция частиц в области 3 мала и Ω^F будет увеличиваться до тех пор, пока скорость $|v_{\min}|$ не станет близкой к c . Если же $|v_{\min}| \gg c$, то частицы не могут удерживаться на силовых линиях, их обратное действие на поле будет уменьшать Ω^F , пока не получим $|v_{\min}| \approx c^*$.

Поэтому, вероятно, $\Omega^F \approx \Omega^H/2$ и темп извлечения вращательной энергии из черной дыры (7.5.1) близок к оптимальному.

По порядку величины мощность рассмотренной "электромашин" есть

$$P \approx \left(10^{40} \frac{\text{эрг}}{c}\right) \left(\frac{M}{10^6 M_\odot}\right)^2 \left(\frac{a}{a_{\max}}\right)^2 \left(\frac{B}{10^4 \text{ Гс}}\right)^2. \quad (7.5.9)$$

Здесь B – напряженность магнитного поля в окрестности черной дыры.

Иногда работа нашей электромашин описывается с помощью электротехнической терминологии [Блендфорд (1979), Знаек (1978), Дамур (1978), Макдональд, Торн (1982), Торн, Блендфорд (1982)]. Запишем в этой терминологии выражения для величин на горизонте событий черной дыры.

Эквипотенциалами на горизонте являются линии постоянного θ , так как поле E^H меридионально [см. (7.3.11)]. Поэтому разность потенциа-

*) Аналогичное рассмотрение скольжения частиц вдоль магнитных силовых линий у горизонта черной дыры приводит к выводу, что условие $|v_{\min}| \approx c$ соответствует граничным условиям (7.3.11), (7.3.13).

лов между двумя эквипотенциалами (1 и 2) есть [см. также (7.3.13)]

$$\Delta U^H = \int_1^2 E^H dl = (\Omega^H - \Omega^F) \frac{\Delta \Psi}{2\pi c} \approx (10^{18} \text{ В}) \left(\frac{M}{10^6 M_\odot} \right) \left(\frac{B}{10^4 \text{ Гс}} \right), \quad (7.5.10)$$

где dl — элемент расстояния по меридиану на поверхности черной дыры, $\Delta \Psi$ — разность Ψ между эквипотенциалами 2 и 1. Последнее равенство в (7.5.10) написано для условий $\Omega^F \approx \Omega^H/2$, Ω^H максимально, эквипотенциали 2 и 1 соответствуют району экватора и району полюса.

С другой стороны, ΔU^H можно записать через поверхностный ток $\vec{j}^H$ и сопротивление:

$$\Delta U^H = R^H \vec{j}^H \Delta l, \quad (7.5.11)$$

где Δl — расстояние по меридиану между эквипотенциалами 2 и 1.

Подставляя вместо $\vec{j}^H$ его выражение (7.3.10), получаем

$$\Delta U^H = \frac{IR^H |\Delta l|}{2\pi \left(\frac{A^H \sin^2 \theta}{\rho_H^2} \right)^{1/2}} = I \Delta Z^H, \quad (7.5.12)$$

где

$$\Delta Z^H \equiv \frac{R^H |\Delta l|}{2\pi \left(\frac{A^H \sin^2 \theta}{\rho_H^2} \right)^{1/2}} \quad (7.5.13)$$

— полное сопротивление между эквипотенциалами 2 и 1 (для случая, когда эквипотенциалам 2 и 1 соответствуют экватор и $\theta \approx \frac{\pi}{4}$, интегрирование (7.5.13) дает ΔZ^H около 30 Ом).

Формулы (7.5.10) и (7.5.13) дают основание сказать, что в данной модели вращающаяся черная дыра действует как батарея с электродвижущей силой порядка $(10^{18} \text{ В}) \left(\frac{M}{10^6 M_\odot} \right) \left(\frac{B}{10^4 \text{ Гс}} \right)$ и внутренним сопротивлением около 30 Ом.

Рассмотренный механизм (и разные его вариации) использовался в многочисленных работах для объяснения активности ядер галактик и квазаров [см., например, Блендфорд (1976), Блендфорд, Знаек (1977), Блендфорд (1979), Руффини (1979), Руффини, Вилсон (1975), Лавлейс и др. (1979), Блендфорд, Рис (1978), Кардашев и др. (1983*), Рис (1982), Новиков, Штерн (1985)].

ФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ПОЛЕ ЧЕРНЫХ ДЫР. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

§ 8.1. Извлечение энергии из черных дыр. Суперрадиация

В этой главе мы продолжим обсуждение эффектов взаимодействия классических частиц и полей с черными дырами*). Начнем с рассмотрения вопроса об эффективности процесса извлечения энергии из вращающихся черных дыр. Напомним, что хотя по определению черная дыра — это область, откуда никакие тела и световые лучи не могут выйти наружу, существуют ситуации, когда с помощью определенных физических процессов можно извлекать из черной дыры энергию. Как мы увидим далее, эта энергия извлекается из поля, связанного с черной дырой и окружающего ее. Это, в частности, возможно, когда черная дыра вращается или является заряженной. Примерами таких процессов служат процесс Пенроуза (см. § 6.2) и электродинамические процессы, рассмотренные в предыдущей главе. В этом параграфе мы установим некоторые общие ограничения на возможную эффективность такого рода процессов.

Рассмотрим эффективность процесса Пенроуза (см. рис. 64). Пусть $\epsilon_i = -p_i^\mu \xi_{(t)\mu}$ — энергия и $j_i = p_i^\mu \xi_{(\varphi)\mu}$ — угловой момент частицы i с импульсом p_i^μ , движущейся в гравитационном поле Керровской черной дыры ($i = 0$ отвечает падающей частице, распадающейся в эргосфере; $i = 1$ — частице, вылетающей на бесконечность; $i = 2$ — частице, поглощаемой черной дырой). Заметим теперь, что на горизонте событий вектор

$$l^\mu = \xi_{(t)}^\mu + \Omega^H \xi_{(\varphi)}^\mu, \quad (8.1.1)$$

где Ω^H — угловая скорость черной дыры, является световым и касательным к образующим горизонта. Поскольку p_2^μ — времениподобный вектор, а l^μ направлен в будущее, то

$$0 \geq l^\mu p_{2\mu} = -\epsilon_2 + \Omega^H j_2 \quad (8.1.2)$$

и, следовательно, для частицы, падающей внутрь черной дыры,

$$j_2 \leq \epsilon_2 / \Omega^H. \quad (8.1.3)$$

В частности, если вылетающая частица обладает большей энергией, чем падающая ($\epsilon_1 - \epsilon_0 = -\epsilon_2 > 0$), то аналогичное соотношение выполняется и для угловых моментов:

$$j_1 - j_0 = -j_2 \geq -\epsilon_2 / \Omega^H \geq 0. \quad (8.1.4)$$

*) Особенности физических процессов в поле черных дыр, для которых существенна их квантовая специфика, обсуждаются в последующих главах.

При поглощении частицы черной дырой ее параметры M и J изменяются:

$$\delta M = \epsilon_2, \quad \delta J = j_2, \quad (8.1.5)$$

причем условие (8.1.3) означает, что

$$\delta M \geq \Omega^H \delta J. \quad (8.1.6)$$

Физические процессы, приводящие к такому изменению параметров δM и δJ черной дыры, которые связаны соотношением

$$\delta M / \Omega^H - \delta J = 0, \quad (8.1.7)$$

называют *обратимыми*. Дифференциальное уравнение (8.1.7), связывающее изменение параметров M и J при обратимом процессе, можно проинтегрировать [Кристодулу (1970)]. Для этого заметим, что полный дифференциал функции

$$\tilde{A} = M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \quad (8.1.8)$$

записывается в виде

$$\delta \tilde{A} = \frac{J}{\sqrt{M^4 - J^2}} \left(\frac{\delta M}{\Omega^H} - \delta J \right). \quad (8.1.9)$$

Здесь

$$\Omega^H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2Mr_+} = \frac{J}{2(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})}.$$

Из соотношений (8.1.6) и (8.1.9) видно, что для рассмотренных выше процессов, связанных с падением частиц на черную дыру, имеет место неравенство

$$\delta \tilde{A} \geq 0, \quad (8.1.10)$$

причем равенство справедливо тогда и только тогда, когда процесс обратимый. Величина

$$M_{\text{ir}} = (\tilde{A}/2)^{1/2} \quad (8.1.11)$$

получила название *неприводимой массы* черной дыры [Кристодулу (1970)]. Из уравнений (8.1.8) и (8.1.11) получаем

$$M^2 = M_{\text{ir}}^2 + \frac{1}{4} \frac{J^2}{M_{\text{ir}}^2} \geq M_{\text{ir}}^2. \quad (8.1.12)$$

Из этого соотношения вытекает, что в результате процесса Пенроуза исходную массу M нельзя сделать меньше M_{ir} , и, следовательно, максимально возможный выигрыш энергии в этом процессе равен $\Delta \mathcal{E} = \Delta M c^2$, где

$$\Delta M = M_0 - M_{\text{ir}}(M_0, J_0), \quad (8.1.13)$$

а M_0 и J_0 — исходные масса и угловой момент черной дыры, $M_{\text{ir}}(M_0, J_0)$ — отвечающая им неприводимая масса.

Простые рассуждения показывают, что при заданной начальной массе M_0 максимальное значение ΔM :

$$\Delta M_{\text{max}} = (1 - 1/\sqrt{2}) M_0 \approx 0,29 M_0 \quad (8.1.14)$$

достигается для экстремальной черной дыры с $J_0 = M_0^2$.

Нетрудно убедиться, что величина $\tilde{A}$ лишь численным коэффициентом отличается от выражения для площади A керовской черной дыры:

$$A \equiv 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi \tilde{A}. \quad (8.1.15)$$

Поэтому условие (8.1.10), означающее неубывание площади поверхности черной дыры для рассматриваемых процессов, по сути дела, является частным случаем общей теоремы Хокинга (§ 5.4).

Теорема Хокинга позволяет сделать ряд общих выводов относительно процессов с участием черных дыр. Прежде всего, неравенство (8.1.6) нетрудно распространить на случай заряженных черных дыр и для процессов, в которых участвуют заряженные частицы. Для этого достаточно воспользоваться выражением (8.1.15), где в случае заряженной вращающейся дыры

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \quad (8.1.16)$$

Условие $\delta A \geq 0$ в этом случае дает

$$\delta M \geq \Omega^H \delta J + \Phi^H \delta Q, \quad (8.1.17)$$

где δJ и δQ — изменение углового момента и заряда черной дыры, а

$$\Phi^H = Q r_+ / (r_+^2 + a^2) \quad (8.1.18)$$

— ее электрический потенциал.

Если в соотношении (8.1.17), обобщающем (8.1.6), имеет место равенство, то, как и ранее, такие процессы будем называть обратимыми. Общим свойством обратимых процессов является то, что площадь поверхности черных дыр для них не возрастает.

Подчеркнем, что в выражении (8.1.17) δJ — полное изменение углового момента черной дыры. При этом не играет роли — связано ли это изменение с угловым моментом падающей частицы, отвечающим ее орбитальному движению, или с ее внутренним угловым моментом (спином). Применение общего неравенства (8.1.17) в последнем случае позволяет, в частности, показать, что со стороны вращающейся черной дыры на спиновую частицу действует дополнительное гравитационное спин-спиновое взаимодействие [Хокинг, (1972a), Уолд (1972), Бекенштейн (1973b)].

Рассмотрим в качестве иллюстрации простейший случай, когда частица со спином s и зарядом e , обладая энергией ϵ , падает на черную дыру, двигаясь точно по оси симметрии. Если такая частица упадет в черную дыру, то, используя законы сохранения, имеем

$$\delta Q = e, \quad \delta J = \sigma s, \quad \delta M \leq \epsilon. \quad (8.1.19)$$

Здесь $\sigma = 1$, если спин направлен по направлению вращения черной дыры, и $\sigma = -1$ в противоположном случае. Возможность неравенства в последнем из соотношений (8.1.19) связана с тем, что часть энергии может быть излучена. Соотношения (8.1.17) и (8.1.19) показывают, что частица со спином может упасть на черную дыру только в том случае, если ее энергия ϵ превышает величину $\sigma s \Omega^H + e \Phi^H$. Второе слагаемое $e \Phi^H$ имеет смысл обычной электростатической энергии отталкивания. Первое слагаемое при $\sigma = 1$ описывает отталкивание, а при $\sigma = -1$ — притяжение за счет спин-спинового взаимодействия [в теории гравитации подобное взаимодействие имеет место для любых двух вращающихся тел; подробный вывод выражения для этой силы и описание аналогии между гравитационным

спин-спиновым взаимодействием и электромагнитным взаимодействием магнитных диполей см. Уолд (1972)].

Поскольку движение частиц в приближении геометрической оптики непосредственно связывается с распространением волновых пакетов, естественно ожидать, что при определенных условиях падение волны на вращающуюся черную дыру также может приводить к усилению этой волны. Убедимся (с помощью теоремы Хокинга), что этот процесс действительно возможен, и выведем условия, при которых он имеет место.

Поскольку метрика Керра — Ньюмена, описывающая геометрию заряженной черной дыры, является стационарной и аксиально-симметричной, при описании распространения волны на ее фоне удобно использовать разложение по собственным функциям операторов $\xi_{(t)}^\mu \partial_\mu \equiv \partial_t$ и $\xi_{(\varphi)}^\mu \partial_\mu \equiv \partial_\varphi$. Рассмотрим поведение моды поля φ_A с квантовыми числами ω, m , временная и угловая зависимость которой имеет вид

$$\varphi_A \sim f_A(r, \theta) \exp(-i\omega t + im\varphi). \quad (8.1.20)$$

Поле φ_A может описывать скалярные, электромагнитные, гравитационные волны*) (или другие бозонные поля, кванты которых, в частности, могут обладать массой μ и зарядом e). Вдали от черной дыры решение (8.1.20) описывает совокупность квантов, каждый из которых обладает энергией $\hbar\omega$, φ -компонентой углового момента $\hbar m$, а также, возможно, электрическим зарядом e . Поэтому для такой волны отношения потока φ -компоненты углового момента и электрического заряда через сферу большого радиуса, окружающую черную дыру, к потоку энергии через эту сферу равны соответственно m/ω и $e/\hbar\omega$. (Это нетрудно доказать строго с помощью явных выражений для тензора энергии-импульса и тока, отвечающих рассматриваемому полю φ_A .) Используя законы сохранения энергии и углового момента, связанные с симметрией рассматриваемой задачи, и закон сохранения электрического заряда, можно показать, что взаимодействие волны φ_A с черной дырой приводит к изменению массы δM , углового момента δJ и заряда δQ последней, причем

$$\delta J = \frac{m}{\omega} \delta M, \quad \delta Q = \frac{e}{\hbar\omega} \delta M. \quad (8.1.21)$$

Используя неравенство (8.1.17), вытекающее из теоремы Хокинга, получаем

$$\delta M \left(1 - \frac{m\Omega^H}{\omega} - \frac{e\Phi^H}{\hbar\omega} \right) \geq 0. \quad (8.1.22)$$

В частности, для мод, удовлетворяющих условию

$$\hbar\omega < \hbar m\Omega^H + e\Phi^H, \quad (8.1.23)$$

процесс рассеяния приводит к уменьшению массы черной дыры. При выполнении этого условия рассеянная волна обладает энергией, большей, чем

*) При распространении электромагнитных и гравитационных волн вблизи заряженной черной дыры возможно их взаимное превращение друг в друга (подробно этот эффект рассмотрен в § 8.4). Этот эффект смешивания не изменяет общего условия усиления волн, однако требует более аккуратного рассмотрения.

падающая, т.е. происходит усиление падающей волны [Зельдович (1971*, 1972*); Мизнер (1972); Старобинский (1973*); Старобинский, Чурилов (1973*); Унру (1974)]. Это явление получило название *суперрадиации*.

На возможность эффекта усиления волн вращающимися черными дырами было впервые обращено внимание Зельдовичем (1971, 1972), который исходил из аналогии таких черных дыр с вращающимися поглощающими телами. Для последних описанный Зельдовичем эффект усиления родственен в известной мере по своей природе эффекту Вавилова — Черенкова. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в обычном плоском пространстве цилиндрическую волну, падающую на цилиндр радиуса R , вращающийся с угловой скоростью Ω относительно оси, совпадающей с осью z . Соответствующее решение φ_A имеет вид

$$\varphi_A = f_A(\rho) \exp[i(m\varphi - \omega t)]. \quad (8.1.24)$$

На поверхности цилиндра $\rho = R$ это поле отвечает возмущению, бегущему с фазовой скоростью $d\varphi/dt = \omega/m$. Если скорость ΩR движения вещества поверхности диэлектрического или проводящего цилиндра превышает линейную скорость $R\omega/m$, с которой фаза падающей волны перемещается по поверхности цилиндра, вместо поглощения происходит усиление волны. Соответствующее условие имеет вид

$$\omega < \Omega m. \quad (8.1.25)$$

Подробное обсуждение относящихся к этому эффекту вопросов можно найти в работе Болотовского, Столярова (1980*).

Подчеркнем, что условие усиления (8.1.23) универсально и не зависит от спина поля. Для частиц со спином m отвечает квантовому числу полного (орбитального или спинового) углового момента. От спина поля существенно зависит величина коэффициента усиления волны. Если для электромагнитного поля максимальное увеличение энергии волны составляет 4,4%, то для гравитационной волны — уже 138% [Старобинский, Чурилов (1973*)]. При определенных условиях такое усиление возможно для гравитационного излучения от частицы, движущейся вблизи вращающейся черной дыры. Если при этом частице сообщается такая же энергия, какую она излучает на бесконечность, то такая частица будет обращаться, не падая на черную дыру, и может служить своеобразным катализатором для извлечения энергии из черной дыры. Подобные орбиты получили название "плавающих" [Мизнер (1972), Пресс, Тьюковский (1972)].

С явлением суперрадиации связан следующий, довольно любопытный эффект [Дамур и др. (1976), Зурос, Эрдли (1979), Детвилер (1980)]. Пусть вне вращающейся черной дыры по круговой орбите вращается волновой пакет массивного скалярного поля и пусть энергия связи на этой орбите такова, что массивные частицы, составляющие этот пакет, не могут излучиться на бесконечность. Возможен, однако, поток этих частиц через горизонт событий. Если частота квантов, падающих внутрь черной дыры, удовлетворяет условию суперрадиации, то их падение сопровождается более интенсивным излучением наружу. Частицы этого излучения, обладая теми же квантовыми числами, что и частицы пакета, не могут вылететь на бесконечность, что приводит к накоплению их вблизи орбиты пакета и в конечном счете к развитию неустойчивости. Детвилер (1980) показал,

что эта неустойчивость имеет место для скалярного поля с массой μ такой, что $\mu M/m_{P1}^2 \ll 1$; при этом характерное время развития неустойчивости

$$\tau = 24 (a/M)^{-1} (m_{P1}^2/\mu M)^8 (m_{P1}/\mu) t_{P1}, \quad (8.1.26)$$

где

$$m_{P1} = (\hbar c/G)^{1/2} \approx 2,18 \cdot 10^{-5} \text{ г},$$

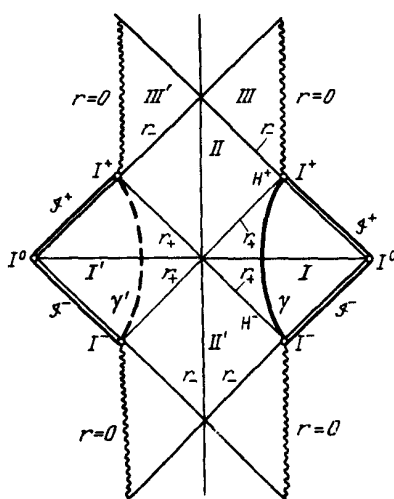
$$t_{P1} = (\hbar G/c^5)^{1/2} \approx 5,39 \cdot 10^{-43} \text{ с} \quad (8.1.27)$$

— планковская масса и планковское время соответственно. Для безмассовых полей эта неустойчивость отсутствует [Детвилер, Ипсер (1973), Пресс, Тюкольский (1973), Тюкольский, Пресс (1974)].

Следует отметить, что хотя описанные выше в этом параграфе процессы (процесс Пенроуза и суперрадиация), приводящие к потере черной дырой энергии, имеют крайне важное принципиальное значение для физики черных дыр, в реальных астрофизических условиях трудно ожидать, чтобы они могли приводить к существенным наблюдаемым явлениям [Машхун (1973), Уолд (1974с), Ковец, Пиран (1975а, б)]. Более интересными по своим возможным следствиям могут быть аналоги процесса Пенроуза, в которых вместо развала частицы происходит столкновение в эргосфере двух частиц, приводящее к образованию двух новых частиц, одна из которых вылетает на бесконечность [Пиран и др. (1975)]. Разновидностью описанного эффекта является комптоновское рассеяние свободно падающего фотона на электроны, обладающем большим угловым моментом и движущемся в эргосфере [Пиран, Шахам (1977)].

§ 8.2. Глобальная структура поля пробного заряда в пространстве-времени вечной черной дыры

При изучении процессов, происходящих вне черной дыры, естественным является описанный в предыдущей главе подход, состоящий в том, что с



помощью фиксации определенным образом выбранных граничных условий на поверхности черной дыры физическая задача в полном пространстве-времени сводится к задаче во внешней области. Обладая рядом достоинств, этот подход по своей природе является неполным, поскольку в нем целиком исключаются из рассмотрения все явления, происходящие внутри черной дыры. Следует подчеркнуть, что изучение подобных явлений и, в частности, детальное описание особенностей физи-

Рис. 72. Диаграмма Пенроуза для полного пространства-времени черной дыры Рейсснера — Нордстрема

ческих процессов в тех областях пространства-времени, где согласно классической теории должны находиться сингулярности, представляют важную задачу физики черных дыр. В этих областях, где кривизна пространства-времени велика, в полной мере проявляются квантовые особенности физических взаимодействий. Общий вопрос о структуре пространства-времени внутри черной дыры мы обсудим в гл. 12, после того как изложим теорию квантовых эффектов в черных дырах. В настоящем параграфе мы рассмотрим частный вопрос о структуре физических полей, создаваемых пробными зарядами в полном пространстве-времени черной дыры. При этом рассмотрении мы считаем метрику черной дыры заданной и пренебрегаем влиянием на нее поля пробного заряда.

Пусть пробный точечный заряд электрического (e) или скалярного безмассового (g) поля покоится вне заряженной вечной черной дыры*). На рис. 72, на котором приведена диаграмма Пенроуза для рассматриваемого пространства-времени, мировая линия этого заряда обозначена γ . Метрика Рейсснера — Нордстрема, описывающая гравитационное поле заряженной черной дыры в координатах t, r , покрывающих область I на этом рисунке, имеет вид

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\omega^2, \quad (8.2.1)$$

$$F = 1 - 2M/r + Q^2/r^2, \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

где M — масса, а Q — электрический заряд черной дыры.

Электрическое (A_μ) и скалярное (φ) поля, создаваемые пробным зарядом, покоящимся в точке r_0, θ_0, φ_0 , определяются как решения уравнений [см. (П. 47), (П. 50)]

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^\mu, \quad F_{\mu\nu} = 2A_{[\nu, \mu]}, \quad (8.2.2a)$$

$$\square\varphi = -4\pi\rho, \quad (8.2.2b)$$

где

$$j^\mu(x) = e\delta_\mu^0 \frac{\delta^3(x - x_0)}{\sqrt{-g(x)}}, \quad \rho(x) = g \frac{\sqrt{-g_{tt}(x)}}{\sqrt{-g(x)}} \delta^3(x - x_0),$$

$$\delta^3(x - x_0) \equiv \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (8.2.3)$$

Решения этих уравнений вне черной дыры (в области I) были получены Лине (1976) и Лейтом, Ли́не (1976), обнаружившими и исправившими небольшую неточность в формуле, выведенной ранее (при $Q = 0$) Копсоном (1928). Эти решения имеют вид **) [ср. с (7.4.1)]

$$A_\mu(x) = \delta_\mu^0 e G_{em}(x, x_0), \quad G_{em}(x, x_0) = -\frac{1}{rr_0} \left(M + \frac{\Pi}{R} \right), \quad (8.2.4a)$$

$$\varphi(x) = gF(r_0)^{1/2} G_{sc}(x, x_0), \quad G_{sc}(x, x_0) = \frac{1}{R}, \quad (8.2.4b)$$

*) Отметим, что такая постановка задачи в известной мере является идеализированной из-за неустойчивости, присущей подобной черной дыре (см. §§ 12.2 и 13.2).

**) Строго говоря, уравнение (8.2.2a) справедливо лишь для полного электрического поля (т.е. для суммы поля пробного заряда и поля черной дыры). Если поле

где

$$\begin{aligned}
 R^2 &\equiv R^2(x, x_0) = \\
 &= (r - M)^2 + (r_0 - M)^2 - 2(r - M)(r_0 - M)\lambda - (M^2 - Q^2)(1 - \lambda^2), \\
 \Pi &\equiv \Pi(x, x_0) = (r - M)(r_0 - M) - (M^2 - Q^2)\lambda, \\
 \lambda &= \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0).
 \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

Используя метод аналитического продолжения, можно распространить это решение из области I на все пространство-время. Для этого введем в областях I, II, I', II' координаты u, v, θ, φ , регулярные в этих областях и связанные в области I с координатами r, t, θ, φ соотношениями

$$\begin{aligned}
 u &= -\exp\left[-\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} (t - r^*)\right], \quad v = \exp\left[\frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} (t + r^*)\right], \\
 r^* &= r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln\left|\frac{r}{r_+} - 1\right| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln\left|\frac{r}{r_-} - 1\right|, \\
 r_{\pm} &\equiv M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad \theta = \theta, \quad \varphi = \varphi.
 \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

При $-\infty < u, v < \infty$, $(\theta, \varphi) \in S^2$ эти координаты покрывают области I, II, I', II', и аналитическое продолжение метрики Рейсснера – Нордстрема (8.2.1) в них имеет вид

$$ds = -2B du dv + r^2 d\omega^2, \tag{8.2.7}$$

где

$$B = \frac{2r_+^4}{r^2} \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{(r_+ - r_-)^2} \exp\left(-r^* \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right),$$

а $r = r(u, v)$ определяется уравнением

$$uv = \left(1 - \frac{r}{r_+}\right) \exp\left[\left(r - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln\left|\frac{r}{r_-} - 1\right|\right) \left(\frac{r_+ - r_-}{r_+^2}\right)\right]. \tag{8.2.8}$$

Отличные от нуля компоненты аналитически продолженных решений (8.2.2) в этих координатах суть

$$A \equiv A_\mu dx^\mu = -\frac{e}{rr_0} \left(M + \frac{\Pi}{R}\right) \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \left(\frac{dv}{v} - \frac{du}{u}\right), \tag{8.2.9}$$

$$F^{uv} = \frac{e}{Br^2 r_0} \left\{ M + \frac{\Pi}{R} - \frac{r}{R^3} [r_0 - M - (r - M)\cos\theta] (r_0^2 - 2Mr_0 + Q^2) \right\},$$

$$F^{v\theta} = \frac{e}{2rr_0} \frac{\sin\theta}{R^3} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} (r_0^2 - 2Mr_0 + Q^2)v, \tag{8.2.10}$$

пробного заряда рассматривать как возмущение, то уравнение для этого возмущения отличается от (8.2.2а) членами, описывающими возмущение гравитационного поля (см. § 8.4). Мы, следуя работам Лине и Лейта, опускаем эти дополнительные члены, что не изменяет общего вывода об особенностях поля внутри черной дыры. При $Q = 0$ эти дополнительные члены отсутствуют.

$$F^{u\theta} = -\frac{e}{2rr_0} \frac{\sin \theta}{R^3} \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} (r_0^2 - 2Mr_0 + Q^2)u, \\ \varphi = gF(r_0)^{1/2} \frac{1}{R}. \quad (8.2.11)$$

В этих формулах r понимается как функция от u и v , определяемая соотношением (8.2.8). Нетрудно видеть, что это решение инвариантно относительно преобразования $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow -v$, отображающего область I на область I'. Поэтому наряду с сингулярностью, отвечающей мировой линии γ заряда, оно обладает также сингулярностью на линии γ' , отвечающей дополнительному заряду $-e$ (или $-g$ в случае скалярного поля) в области I'. Поэтому выражения (8.2.9) – (8.2.11) не являются решением поставленной задачи о нахождении поля, создаваемого одиночным зарядом.

Искомое решение может быть получено, если учесть, что в областях I' и II', лежащих вне области влияния пробных зарядов, поле естественно выбрать равным нулю*). Это решение может быть представлено в следующем виде [Зельников, Фролов (1982*, 1983*), Демянский, Новиков (1982)]:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{\text{reg}} + F_{\mu\nu}^{\text{sing}}, \quad F_{\mu\nu}^{\text{reg}} = F_{\mu\nu} \theta(v), \quad F_{\mu\nu}^{\text{sing}} = \Psi_{\mu\nu} \delta(v), \quad (8.2.12a)$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi^{\text{reg}} + \varphi^{\text{sing}}, \quad \varphi^{\text{reg}} = \varphi \theta(v), \quad \varphi^{\text{sing}} = \Psi \delta(v), \quad (8.2.12b)$$

где $F_{\mu\nu}$ и φ – решения (8.2.10) и (8.2.11). Сингулярные члены $F_{\mu\nu}^{\text{sing}}$ и φ^{sing} обеспечивают выполнимость однородных уравнений поля на поверхности $v = 0$. Подставляя (8.2.12a) в уравнения Максвелла (8.2.2a), получаем

$$\Psi^{\mu\nu} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} \Psi^{\mu\nu}) = -F^{\mu\nu} |_{v=0}. \quad (8.2.13)$$

Ограниченное на H^- решение этих уравнений имеет вид

$$\Psi_{\mu\nu} = -2e\delta_{[\mu}^v \delta_{\nu]}^\theta \sin \theta \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{r_0} \frac{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}{r_0 - M - \sqrt{M^2 - Q^2} \cos \theta}. \quad (8.2.14)$$

Аналогично, подставляя (8.2.12b) в уравнение для скалярного поля (8.2.2b), получаем

$$(1 - \lambda^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} - 2\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} - \frac{r_+ - r_-}{r_+} \Psi = 0, \quad (8.2.15)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0, \quad \lambda = \cos \theta.$$

Если черная дыра не является экстремальной ($Q < M$), то единственным ограниченным на H^- решением (8.2.15) будет $\Psi = 0$. Для экстремальной

*) Обсуждение вопроса о граничных условиях для поля пробного заряда в пространстве-времени вечной черной дыры можно найти в работе Демянского, Новикова (1982).

черной дыры ($Q=M$) имеется также решение $\Psi = \text{const}$, однако значение $|\Psi|_H$ не определяется внешним скалярным полем и поэтому не имеет отношения к заряду g . Таким образом, в областях I, II, I' и II' решение поставленной задачи дается соотношениями (8.2.12a), (8.2.12b) и (8.2.13) при $\Psi = 0$.

Аналитическое продолжение легко позволяет определить A_μ и φ в области III'. Вне горизонта Кошши (например, в области III) решение однозначно распространить, вообще говоря, нельзя, поскольку в этой области оно зависит от условий, которые требуется задавать дополнительно. В пределе $Q=0$ полученное решение описывает поля от точечных источников в пространстве-времени вечной шварцшильдовской черной дыры, метрика которой в координатах u, v, θ, φ имеет вид*)

$$ds^2 = -2B du dv + r^2 d\omega^2, \quad (8.2.16)$$

где

$$B = \frac{2r_g^3}{r} e^{-r/r_g}, \quad r_g = 2M, \\ u v = \left(1 - \frac{r}{r_g}\right) e^{r/r_g}. \quad (8.2.17)$$

Появление δ -образной особенности в полученном выше решении для электромагнитного поля связано с постановкой задачи, при которой считается, что заряд все время покоился около черной дыры. Аналогичная особенность возникает и в полном решении, описывающем массивное векторное поле от источника вне черной дыры [Фролов (1978, 1986*)] **. Описанные выше особенности при $v=0$ сглаживаются, если рассмотреть решения, описывающие случай, когда заряд вносится в поле черной дыры.

Интересно отметить, что имеется тесная связь полученного выше полного решения для поля от пробного заряда в пространстве-времени черной дыры с решением для поля от равноускоренного заряда в плоском пространстве-времени [Зельников, Фролов (1982*, 1983*)]. Для установления этой связи заметим, что если в метрике (8.2.16), описывающей гравитационное поле черной дыры, устремить параметр M к бесконечности, то в конечной области пространства-времени вблизи горизонта событий влияние кривизны неограниченно уменьшается, и гравитационное поле в этой области все с большей степенью точности можно считать однородным. Формально переход к пределу однородного поля в метрике (8.2.16) осуществляется следующим образом. Вводятся координаты U, V, X, Y , связанные с u, v, θ, φ соотношениями

$$U = 4M e^{-1/2} u, \quad V = 4M e^{-1/2} v, \\ X^2 + Y^2 = 16M^2 \text{tg}^2(\theta/2), \quad Y/X = \text{tg} \varphi. \quad (8.2.18)$$

*) Эти координаты связаны с координатами $\tilde{u}, \tilde{v}$ [см. (2.7.12)] соотношениями $u = \tilde{v} - \tilde{u}, v = \tilde{v} + \tilde{u}$.

**) О поведении массивного векторного поля вблизи шварцшильдовской черной дыры см. также Гальцов и др. (1984*).

В этих координатах метрика (8.2.16) принимает вид

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} e^{1-r/2M} dU dV + \left(\frac{r}{2M}\right)^2 \frac{dX^2 + dY^2}{\left(1 + \frac{X^2 + Y^2}{16M^2}\right)}, \quad (8.2.19)$$

где r связано с U и V соотношением

$$UV = 16M^2 \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M - 1}. \quad (8.2.20)$$

Если теперь при фиксированных значениях координат U, V, X, Y устремить M к бесконечности, то (8.2.19) переходит в метрику плоского пространства

$$ds^2 = -dU dV + dX^2 + dY^2 = -dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2 = -dT^2 + dZ^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \quad (8.2.21)$$

Здесь

$$T = \frac{1}{2}(U + V), \quad Z = -\frac{1}{2}(U - V), \quad \rho^2 = X^2 + Y^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X}. \quad (8.2.22)$$

Уравнение $r = r_0$ движения пробного заряда при этом принимает вид

$$U_0 V_0 \equiv -Z_0^2 + T^2 = -w^{-2}, \quad X_0 = Y_0 = 0, \quad (8.2.23)$$

где w — модуль 4-ускорения движения заряда. В пределе $M \rightarrow \infty$ поверхности горизонтов $H^\pm$ превращаются в световые гиперплоскости, описываемые уравнением $UV = 0$ [“горизонты” пространства Риндлера (1966)]. Инвариантное расстояние до горизонта для частицы, имеющей 4-ускорение w , стремится при этом к конечному значению w^{-1} .

При описанном выше предельном переходе выражения (8.2.12) (при $Q = 0$) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{UV} &= \frac{2e}{w^2} \frac{(\rho^2 + \xi + w^{-2})}{S^3} \theta(V), \\ \tilde{F}_{U\rho} &= -\frac{4e\rho V}{w^2 S^3} \theta(V), \\ \tilde{F}_{V\rho} &= \frac{4e\rho U}{w^2 S^3} \theta(V) - \frac{2e\rho}{\rho^2 + w^{-2}} \delta(V), \\ \varphi &= \frac{g}{w} \frac{2\theta(V)}{S}, \end{aligned} \quad (8.2.24)$$

$$\varphi = \frac{g}{w} \frac{2\theta(V)}{S}, \quad (8.2.25)$$

где

$$S = [(\rho^2 + \xi + w^{-2})^2 + 4\xi w^{-2}]^{1/2}, \quad \xi = UV. \quad (8.2.26)$$

Выражения (8.2.24) для $\tilde{F}_{\mu\nu}$ могут быть получены из следующего 4-потенциала:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\mu dx^\mu &= -\frac{e}{2} \theta(V) \left(\frac{\rho^2 + \xi + w^{-2}}{S} - 1 \right) \left(\frac{dV}{V} - \frac{dU}{U} \right) - \\ &- 2e\theta(V) \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + w^{-2}}. \end{aligned} \quad (8.2.27)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (8.2.24) совпадают с выражением для поля от равноускоренного электрического заряда [см., например, Бульвар (1980)]; при этом член, пропорциональный $\delta(V)$ в (8.2.24), правильно воспроизводит сингулярный при $V = 0$ член, введенный в работе Бонди, Голда (1955).

§ 8.3. Сдвиг собственной энергии заряженной частицы в поле черной дыры

В этом параграфе мы рассмотрим эффект изменения собственной энергии заряженной частицы при помещении ее в сильное статическое гравитационное поле. Этот эффект состоит в следующем. Полная масса заряженной частицы складывается из ее "механической" массы, локализованной в точке, где находится заряд, и "электромагнитной" массы, распределенной по области, где отлично от нуля электромагнитное поле. При помещении заряженной частицы в неоднородное гравитационное поле последнее поразному действует на "локальную" и "распределенную" массы, вызывая "деформацию" электрического поля заряда, что приводит к дополнительному изменению собственной энергии. Поскольку это изменение зависит от положения тела, то силы, действующие в гравитационном поле на частицы с одинаковой полной инертной массой в случае, когда одна из частиц заряжена, а другая нейтральна, отличаются друг от друга.

Впервые вопрос о влиянии гравитационного поля на собственную энергию электрического заряда рассматривался Ферми (1921). Им был исследован случай, когда электрический заряд покоится в однородном гравитационном поле, и показано, что электромагнитное взаимодействие, вызывающее изменение инертной массы частицы, одновременно вызывает точно такое же изменение ее гравитационной массы, что находится в полном соответствии с принципом эквивалентности. Для неоднородного гравитационного поля аргументы, основанные на принципе эквивалентности, при рассмотрении системы в целом неприменимы, и, вообще говоря, следует ожидать, что соотношение между собственной энергией заряженной частицы и изменением ее гравитационной массы будет носить более сложный характер.

Для частицы, находящейся в поле черной дыры, это действительно так, и соответствующие поправки (в приближении $GM/c^2 r \ll 1$) были найдены Виленкиным (1979а). Там же было показано, что эффект неоднородности гравитационного поля приводит к появлению дополнительной силы выталкивания заряда в направлении от черной дыры. Еще раньше Унру (1976а) показал, что аналогичная сила действует на пробный заряд, помещенный внутри тонкой полый массивной оболочки.

Смит, Уилл (1980) и Фролов, Зельников (1980) обратили внимание на то, что величина сдвига собственной энергии электрического заряда в поле шварцшильдовской черной дыры допускает точное вычисление, и вычислили величину дополнительной силы выталкивания. Этот результат позднее был обобщен на случай черных дыр Рейсснера — Нордстрема [Зельников, Фролов (1982*)], Керра [Лейт, Лине (1982)] и Керра — Ньюмена [Лохья (1982)].

Для вычисления величины сдвига собственной энергии заряда в поле черной дыры мы предположим, что классическая частица, т.е. система связанных электрических зарядов, покоится на оси симметрии в стационарном гравитационном поле и удерживается соответствующим образом выбранной внешней силой. Обозначим через $\xi_{(t)}^\mu$ векторное поле Киллинга, времениподобное на бесконечности и нормированное там условием $\xi_{(t)}^\mu \xi_{(t)\mu} = -1$. Тогда энергия такой системы равна*)

$$E = - \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} \xi_{(t)}^\mu d\sigma^\nu, \quad (8.3.1)$$

где $T_{\mu\nu}$ — полный метрический тензор энергии-импульса системы. Для определенности будем рассматривать в качестве модели заряженной частицы жесткую непроводящую тонкую сферу массы m_0 и радиуса ϵ , по поверхности которой распределен заряд e . Имея в виду дальнейший переход к пределу точечной частицы, будем считать, что ϵ значительно меньше характерных размеров неоднородностей гравитационного и внешнего электромагнитного полей, и в окончательном ответе будем пренебрегать членами $O(\epsilon)$.

Полная энергия E частицы складывается из 1) E_0 — части энергии, связанной с "механической" массой частицы m_0 ($E_0 = |\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)}|^{1/2} m_0 c^2$); 2) E_{self} — собственной энергии, т.е. энергии самодействия заряда частицы; 3) E_{ext} — энергии взаимодействия частицы с внешним полем; 4) E_{int} — энергии того дополнительного взаимодействия, которое обеспечивает устойчивость заряженной частицы. Введение дополнительного взаимодействия обуславливает выполнимость теоремы Лауэ. Если обозначить через ϵ_0 равновесный радиус незаряженной частицы, то $E_{\text{int}}(\epsilon) = E_{\text{int}}(\epsilon_0) + \frac{1}{2} K(\epsilon - \epsilon_0)^2$, и за счет выбора достаточно большой величины эффективной жесткости K изменения (вызванные внесением заряда в поле) равновесного размера $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$ и энергии $\Delta E = E_{\text{int}}(\epsilon) - E_{\text{int}}(\epsilon_0)$ можно сделать сколь угодно малыми. В дальнейшем будем пренебрегать величинами $\Delta\epsilon$ и ΔE , считая, что жесткость K выбрана соответствующим образом. Включив в E_0 постоянную величину $E_{\text{int}}(\epsilon_0)$, запишем выражение для полной энергии частицы в виде разложения по степеням заряда e частицы:

$$E = E_0 + E_{\text{ext}} + E_{\text{self}}. \quad (8.3.2)$$

Вдали от тяготеющих тел в отсутствие внешнего поля формула (8.3.2) сводится к следующему выражению:

$$E = mc^2, \quad (8.3.3)$$

где $m = m_0 + e^2/2\epsilon c^2$. Отличие m от m_0 обусловлено энергией, заключенной в поле, создаваемом зарядом. При внесении незаряженной частицы в статическое гравитационное поле ее энергия в результате совершенной работы уменьшится и станет равной $E_0 = |\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)}|^{1/2} m c^2$. Если же частица заряжена, часть совершаемой работы идет на перестройку создавае-

*) Мы используем определение (П.26) для $d\sigma_\mu$, при котором элемент объема поверхности $x^0 = \text{const}$ равен $d\sigma_\mu = \delta_\mu^0 \sqrt{-g} d^3x$.

мого ею поля. В результате $E_0 + E_{\text{self}}$ не совпадает, вообще говоря, с $|\xi(t) \cdot \xi(t)|^{1/2} mc^2$.

Выражение для E_{self} можно записать в виде

$$E_{\text{self}} = \int_{\Sigma} \Pi^{\beta} d\sigma_{\beta}, \quad (8.3.4)$$

где

$$-\Pi^{\beta} = T^{\beta}_{\alpha} \xi^{\alpha}_{(t)} \equiv \frac{1}{4\pi} \left(F^{\beta}_{\mu} F^{\mu}_{\alpha} - \frac{1}{4} \delta^{\beta}_{\alpha} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \xi^{\alpha}_{(t)}, \quad (8.3.5)$$

$F_{\alpha\beta}$ — напряженность поля, создаваемая током

$$j^{\mu}(x) = \delta^{\mu}_0 \frac{e}{4\pi\epsilon^2\sqrt{-g(x)}} \delta(l(x, x_0) - \epsilon), \quad (8.3.6)$$

описывающим распределение зарядов частицы. Здесь $l(x, x_0)$ — инвариантное расстояние точки (t, x) от точки (t, x_0) центра заряженной частицы, вычисленное вдоль геодезической, соединяющей эти точки, а ϵ — инвариантный размер частицы. Интегрирование в (8.3.4) проводится по пространственноподобной поверхности Σ , пересекающей горизонт H^+ . Заметим, что интеграл (8.3.4) по части Σ , расположенной внутри горизонта событий, представляет собой энергию поля, находящегося внутри черной дыры, и соответствующий вклад входит как часть в определение полной массы черной дыры. Поэтому, интересуясь вычислением сдвига энергии в поле заданной черной дыры, будем считать параметры последней фиксированными и, в соответствии с этим, интегрирование в (8.3.4) вести по части Σ , лежащей вне черной дыры*).

Используя уравнения Максвелла

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^{\mu}, \quad (8.3.7)$$

можно преобразовать выражение (8.3.5) к виду

$$\Pi^{\beta} = \frac{1}{8\pi} (\xi^{\nu} A_{\alpha} F^{\alpha\beta} - \xi^{\beta} A_{\alpha} F^{\alpha\nu} - 2\xi^{\alpha} A_{\alpha} F^{\nu\beta})_{;\nu} + \frac{1}{2} \xi^{\beta} A^{\alpha} j_{\alpha} - j^{\beta} \xi^{\alpha} A_{\alpha}. \quad (8.3.8)$$

С помощью теоремы Стокса интеграл от выражения в скобках в правой части этой формулы можно свести к сумме интеграла по поверхности черной дыры и интеграла по бесконечно удаленной поверхности. Из-за быстрого убывания полей на бесконечности второй из этих интегралов обращается в нуль. Нетрудно убедиться, что для частицы, расположенной на оси симметрии, и первый интеграл (по поверхности черной дыры) также равен нулю. Таким образом, если учесть параллельность ξ^{α} и j^{α} , окончательно имеем

$$E_{\text{self}} = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} A_{\alpha} j^{\alpha} \xi^{\beta} d\sigma_{\beta}. \quad (8.3.9)$$

* Выражения (8.3.4) — (8.3.5) для собственной энергии заряда с описанным выше условием на выбор области интегрирования Σ находятся в полном соответствии с общим выражением (11.2.48) для изменения массы системы, содержащей черную дыру, при изменении параметров самой системы. Интересно отметить, что для шварцшильдовской черной дыры интеграл по части поверхности Σ , лежащей под горизонтом, тождественно равен нулю.

Чтобы получить явное аналитическое выражение для E_{self} , можно воспользоваться выражением для потенциала A_α , создаваемого точечным зарядом, расположенным на оси вращения в пространстве-времени Керра, найденным Лине (1977a). Получаемое при этом выражение для E_{self} имеет вид

$$E_{\text{self}} = \frac{e^2}{2\epsilon} |g_{tt}|^{1/2} + \frac{e^2}{2} \frac{M}{r_0^2 + a^2}. \quad (8.3.10)$$

Если сравнить силу, необходимую для того, чтобы удержать такую частицу в точке r_0 , с силой, которая требуется для этого в случае нейтральной частицы с массой $m = m_0 + e^2/2\epsilon$, то их разность

$$\Delta f = |\Delta f^\mu \Delta f_\mu|^{1/2} = e^2 \frac{Mr_0}{(r_0^2 + a^2)^2}. \quad (8.3.11)$$

Эта избыточная сила Δf^μ , действующая на заряженную частицу, направлена по оси симметрии в сторону от черной дыры.

Если заряженная (со скалярным, электрическим или гравитационным зарядом) частица покоится вблизи вращающейся черной дыры вне оси симметрии, то на нее действует дополнительная сила [Гальцов (1982)]. Эта сила пропорциональна угловому моменту черной дыры и квадрату заряда частицы. Она возникает как реакция на приливное воздействие, оказываемое частицей на черную дыру и стремящееся затормозить ее вращение. Эта сила исчезает, если частица вращается с той же угловой скоростью, что и черная дыра, или находится на оси симметрии.

§ 8.4. Взаимное превращение электромагнитных и гравитационных волн в поле заряженной черной дыры

Хорошо известным следствием нелинейности системы уравнений Эйнштейна — Максвелла является эффект взаимного превращения электромагнитных и гравитационных волн во внешнем электрическом поле [подробное обсуждение этого эффекта и ссылки на соответствующие работы см., например, Сибгатуллин (1984*)].

В настоящем параграфе мы кратко остановимся на описании этого эффекта в применении к задаче о распространении фотонов и гравитонов в поле заряженной черной дыры [Сибгатуллин (1973*, 1974*, 1984*), Сибгатуллин, Алексеев (1974*), Герлах (1974, 1975)].

Пусть имеются метрика $g_{\mu\nu}$ и электромагнитное поле A_μ , удовлетворяющие системе уравнений Эйнштейна — Максвелла, и пусть $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ и $a_\mu = \delta A_\mu$ — малые возмущения на этом фоне. Тогда из условия, что $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ и $A_\mu + a_\mu$ также являются решениями этих уравнений, вытекает следующая линеаризованная система для возмущений:

$$\begin{aligned} k_{\mu\nu;\lambda}{}^{;\lambda} - k^\lambda{}_{\mu;\nu;\lambda} - k^\lambda{}_{\nu;\mu;\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} k_{;\lambda}{}^{;\lambda} - \\ - 2k^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} k_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + g_{\mu\nu} k^{\alpha\gamma} F_{\alpha\beta} F^\beta{}_\gamma + \\ + k T_{\mu\nu} + 2F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} + 2F_\nu{}^\alpha f_{\mu\alpha} - g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = 0, \end{aligned} \quad (8.4.1a)$$

$$f^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - k_{\beta\rho} F^{\alpha\rho;\beta} - k_\mu{}^\alpha{}_{;\beta} F^{\mu\beta} - k_{\mu\beta}{}^{;\beta} F^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} k_{;\beta} F^{\alpha\beta} = 0. \quad (8.4.1b)$$

Здесь

$$k_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h g_{\mu\nu}, \quad h = h_{\alpha}^{\alpha}, \quad k = k_{\alpha}^{\alpha},$$

$$f_{\mu\nu} = a_{\nu,\mu} - a_{\mu,\nu}, \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}; \quad (8.4.2)$$

поднятие, опускание индексов и ковариантное дифференцирование осуществляется с помощью метрики $g_{\mu\nu}$, а $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля $F_{\mu\nu}$ [см. (П.48)].

Эта система инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}, \quad (8.4.3)$$

$$a_{\mu} \rightarrow a_{\mu} + \lambda_{;\mu} - \xi^{\alpha} A_{\mu;\alpha} - \xi_{\alpha;\mu} A^{\alpha}.$$

Для ликвидации калибровочного произвола удобно наложить следующие дополнительные условия:

$$k^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad a^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0. \quad (8.4.4)$$

Мы рассмотрим эффект взаимодействия электромагнитных и гравитационных возмущений, связанный с появлением членов, содержащих электрическое поле f , в уравнении (8.4.1a) и членов, содержащих гравитационное возмущение k , в уравнении (8.4.1b), в приближении, когда длина волны λ электромагнитных и гравитационных волн много меньше характерного размера L неоднородностей фоновых полей $g_{\mu\nu}$ и A_{μ} . Используя приближение геометрической оптики*), запишем возмущения $k_{\mu\nu}$ и a_{μ} в следующем виде:

$$a_{\mu} = \text{Re}[(\alpha_{\mu} + \epsilon\beta_{\mu} + \dots) e^{iS/\epsilon}], \quad (8.4.5a)$$

$$k_{\mu\nu} = \text{Re}[(\kappa_{\mu\nu} + \epsilon\pi_{\mu\nu} + \dots) e^{iS/\epsilon}], \quad (8.4.5b)$$

где ϵ — некий параметр, характеризующий степень малости рассматриваемого члена по отношению к безразмерному параметру λ/L . Фазовые функции S в выражениях (8.4.5) выбраны так, что они совпадают друг с другом. Этого можно добиться за счет переопределения предэкспонент в случае, если их различие порядка $O(\epsilon)$. В противном случае, если разница в фазах S_a и S_k в выражениях для a_{μ} и $k_{\mu\nu}$ не мала ($S_a - S_k = O(\epsilon^0)$), члены, обуславливающие перемешивание, входят с высокочастотным множителем $e^{(S_a - S_k)/\epsilon}$, и перемешивание в низшем по ϵ порядке отсутствует.

Если обозначить $l_{\alpha} = S_{,\alpha}$, то при подстановке (8.4.5) в уравнения (8.4.1) и в калибровочные условия (8.4.4) приравнивание нулю членов порядка ϵ^{-2} и ϵ^{-1} приводит к следующему соотношению (уравнение эйконала):

$$l_{\alpha} l^{\alpha} = 0 \quad (8.4.6)$$

и уравнениям

$$l^{\mu} \kappa_{\mu\nu} = 0, \quad l^{\mu} \alpha_{\mu} = 0, \quad (8.4.7)$$

$$l^{\beta}{}_{;\beta} \alpha^{\mu} + 2l^{\beta} \alpha^{\mu}{}_{;\beta} = N_1{}^{\mu}, \quad (8.4.8a)$$

$$l^{\beta}{}_{;\beta} \kappa_{\mu\nu} + 2l^{\beta} \kappa_{\mu\nu}{}_{;\beta} = N_2{}_{\mu\nu}, \quad (8.4.8b)$$

*) О применении метода геометрической оптики к распространению высокочастотных гравитационных волн см. Айзааксон (1968 а, б). Детальное изложение этого метода для электромагнитных и гравитационных возмущений можно найти в книге Мизнера, Торна, Уилера (1973).

где

$$N_1{}^\mu = l_\beta \left(\frac{1}{2} F^{\mu\beta} \kappa^\alpha{}_\alpha - F_\gamma{}^\mu \kappa^\gamma{}^\alpha \right), \quad (8.4.9a)$$

$$N_{2\mu\nu} = -4 \left[F_\mu{}^\alpha l_{[\nu} \alpha_{\alpha]} + F_\nu{}^\alpha l_{[\mu} \alpha_{\alpha]} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \alpha_\alpha l_\beta \right]. \quad (8.4.9b)$$

Условие (8.4.6) показывает, что поверхность постоянной фазы $S = \text{const}$ — световая. Поэтому интегральные линии $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, определяемые уравнением

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = l^\mu(x) \quad (8.4.10)$$

и лежащие на этой поверхности, являются световыми геодезическими, а параметр λ — аффинный.

Дополним векторное поле l^μ до комплексной световой тетрады $(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$, потребовав, чтобы векторы этой тетрады были нормированы условиями

$$l^\mu n_\mu = -1, \quad m^\mu \bar{m}_\mu = 1 \quad (8.4.11)$$

(остальные скалярные произведения обращаются в нуль), а сами тетрады были ковариантно постоянны вдоль интегральных кривых l^μ :

$$l^\mu m^\nu{}_{;\mu} = l^\mu n^\nu{}_{;\mu} = 0. \quad (8.4.12)$$

Из условия ортогональности $l^\mu m_\mu = 0$ следует, что векторы $m_\mu, \bar{m}_\mu$ касательны к поверхности $S = \text{const}$. Можно показать [см., например, Сибгатуллин (1984*)], что оставшийся произвол в калибровочных преобразованиях (8.4.3), сохраняющих дополнительные условия (8.4.7), может быть использован для того, чтобы привести выражения для α_μ и $\kappa_{\mu\nu}$ к виду

$$\alpha_\mu = A \bar{m}_\mu + \bar{A} m_\mu, \quad (8.4.13)$$

$$\frac{1}{2} \kappa_{\mu\nu} = H \bar{m}_\mu \bar{m}_\nu + \bar{H} m_\mu m_\nu.$$

Умножая (8.4.8a) на m^μ и (8.4.8b) на $m^\mu m^\nu$ и вводя обозначения $\Phi_0 = F^{\alpha\beta} l_\alpha m_\beta$ и $l^\beta{}_{;\beta} = -2\rho$, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{dA}{d\lambda} - \rho A = \bar{\Phi}_0 H, \quad (8.4.14a)$$

$$\frac{dH}{d\lambda} - \rho H = -\Phi_0 A. \quad (8.4.14b)$$

Из этих уравнений следует соотношение

$$[l^\mu (|A|^2 + |H|^2)]_{;\mu} = 0, \quad (8.4.15)$$

которое можно интерпретировать как закон сохранения суммарного числа фотонов и гравитонов.

Систему уравнений (8.4.14) можно несколько упростить, если от переменных A, H перейти к величинам

$$\tilde{A} = z A, \quad \tilde{H} = z H, \quad (8.4.16a)$$

где

$$z = z(\lambda) \equiv z_0 \exp \left[- \int_{\lambda_0}^{\lambda} \rho d\lambda \right]. \quad (8.4.16b)$$

В терминах этих переменных уравнения (8.4.14) принимают вид

$$\frac{d\tilde{A}}{d\lambda} = \tilde{\Phi}_0 \tilde{H}, \quad \frac{d\tilde{H}}{d\lambda} = -\tilde{\Phi}_0 \tilde{A}. \quad (8.4.17)$$

В случае, когда $\Phi_0 = \tilde{\Phi}_0$, эта система сводится к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 \tilde{A}}{dx^2} + \tilde{A} = 0, \quad (8.4.18)$$

где $x = \int \Phi_0 d\lambda$. Это уравнение показывает, что амплитуда как электромагнитного, так и гравитационного поля испытывает осцилляции, связанные с процессом взаимного превращения фотонов и гравитонов. Период этих осцилляций $\Delta \lambda$ определяется из условия [Сибгатуллин (1974*)]

$$2\pi = \int_{\lambda}^{\lambda + \Delta \lambda} \Phi_0 d\lambda. \quad (8.4.19)$$

Все сказанное выше непосредственно переносится на случай, когда высокочастотные фотоны и гравитоны распространяются в поле заряженной черной дыры. Уравнение эйконала (8.4.6):

$$g^{\mu\nu} S_{,\mu} S_{,\nu} = 0 \quad (8.4.20)$$

в метрике Рейсснера–Нордстрема (8.2.1) допускает полный интеграл

$$S = t \pm R(r) \pm \Psi(\theta) + m\varphi, \quad (8.4.21)$$

где

$$R(r) = \int F^{-1} \sqrt{1 - b^2 F/r^2} dr, \quad (8.4.22)$$

$$\Psi(\theta) = \int \sqrt{b^2 - m^2 / \sin^2 \theta} d\theta, \quad F = 1 - 2M/r + Q^2/r^2.$$

Световые лучи, образующие поверхность $S = \text{const}$, параметризуются произвольными постоянными b и m , имеющими смысл прицельного параметра и углового момента, и описываются уравнениями

$$S = \text{const}, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \text{const}, \quad \frac{\partial S}{\partial m} = \text{const}. \quad (8.4.23)$$

Для данной конгруэнции световых лучей аффинный параметр λ связан с r соотношением $d\lambda = dr (1 - F b^2 r^{-2})^{-1/2}$, а комплексная световая тетрада может быть выбрана так, что Φ_0 является действительной величиной и имеет вид

$$\Phi_0 = b Q / r^3. \quad (8.4.24)$$

При этом уравнение (8.4.19), определяющее период осцилляций, принимает вид

$$2\pi = Q b \int \frac{dr}{r^3 \sqrt{1 - F b^2 r^{-2}}}. \quad (8.4.25)$$

Если на заряженную черную дыру падает высокочастотная электромагнитная волна с амплитудой A_{in} и прицельным параметром b , то после прохождения вблизи черной дыры (если только последняя ее не захватит) возникнут выходящие электромагнитная и гравитационная волны с амплитудами A_{out} и H_{out} [Сибгатуллин (1974*, 1984*)]:

$$\begin{aligned} A_{out} &= A_{in} \cos \left[2Qb \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \sqrt{1 - Fb^2 r^{-2}}} \right], \\ H_{out} &= A_{in} \sin \left[2Qb \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^3 \sqrt{1 - Fb^2 r^{-2}}} \right], \end{aligned} \quad (8.4.26)$$

где r_0 — минимальное значение r для светового луча с данным прицельным параметром b . Это значение совпадает с максимальным корнем уравнения

$$F(r) = r^2/b^2. \quad (8.4.27)$$

При $b = b_{cr}$, где

$$\begin{aligned} b_{cr}^2 &= 4M^2 \left[x + \frac{5}{2} + \sqrt{1+8x} + (8x)^{-1} (\sqrt{1+8x} - 1) \right], \\ x &= 1 - Q^2/M^2, \end{aligned} \quad (8.4.28)$$

этот корень, равный

$$r_0 = r_{cr} = \frac{M}{2} (3 + \sqrt{1+8x}), \quad (8.4.29)$$

становится критным. В этом случае интегралы в (8.4.26) расходятся. Соответствующий прицельный параметр отвечает неустойчивой замкнутой круговой орбите.

Расходимость интегралов в (8.4.26) связана с невыполнением условий применимости приближения геометрической оптики. Учет волновых свойств света и гравитационного излучения приводит к конечному ответу. Оказывается, что при $|b - b_{cr}| \leq O(\omega^{-1})$ количество актов взаимопревращения волн вблизи экстремальной ($Q = M$) черной дыры порядка единицы, а суммарная интенсивность выходящих электромагнитных и гравитационных волн составляет конечную часть интенсивности падающего электромагнитного излучения. Остальная энергия при этом поглощается черной дырой.

Для вращающейся заряженной черной дыры описанный выше эффект взаимного превращения фотонов и гравитонов сопровождается дополнительным вращением плоскости их поляризации [Сибгатуллин (1984*)]. Подчеркнем, что эффект взаимопревращения может иметь место только вблизи заряженных дыр. Хотя, как уже отмечалось ранее, их заряд в реальных астрофизических условиях, по-видимому, не может быть велик, тем не менее существуют процессы, приводящие к возникновению у черной дыры отличного от нуля электрического заряда. Один из таких процессов, связанный с действием на вращающуюся черную дыру внешнего магнитного поля, был описан в предыдущей главе. Другой возможный процесс, предложенный Шварцманом (1971*), связан с разницей в действии давления излучения на электроны и ионы вещества, аккрецирующего на черную дыру.

§ 8.5. Черная дыра во внешнем поле. Взаимодействие черных дыр

При внешнем воздействии на черную дыру она ведет себя в известной мере так же, как упругое компактное тело. Некоторые особенности "отклика" черной дыры на такое воздействие связаны главным образом с тем, что размеры ее однозначно зависят от ее массы, а гравитационное самодействие последней экстремально велико.

Прежде чем перейти к детальному описанию поведения черных дыр во внешнем поле, остановимся на вопросе, который иногда вызывает недоумение. Представим ситуацию, когда имеется покоящаяся уединенная (например, шварцшильдовская) черная дыра и в некоторый момент времени удаленный наблюдатель включает внешнее поле, с тем чтобы определить его воздействие на черную дыру. Для определенности можно считать, что на нее направляется плоская световая волна. Давление такой волны на обычное тело (связанное с эффектами ее поглощения и рассеяния) приведет, вообще говоря, к движению тела. С другой стороны, если проследить за характером движения фронта световой волны в метрике Шварцшильда, то можно убедиться, что для достижения фронтом волны гравитационного радиуса потребуется бесконечно большое время по часам удаленного наблюдателя. Детальный расчет показывает [см., например, Ханни (1977)], что фронт волны огибает черную дыру и волна распространяется дальше. При этом в ней возникает расходящаяся составляющая, свидетельствующая о рассеянии, а вокруг черной дыры образуется новый фронт, отвечающий движению излучения, падающего на нее. Возникает вопрос — как черная дыра может "почувствовать" давление на нее излучения и прийти в движение за конечное (по часам удаленного наблюдателя) время, если с точки зрения этого наблюдателя излучение никогда не достигает горизонта*)?

Для ответа на этот вопрос полезно проанализировать близкую ситуацию, возникающую при рассеянии световой волны на теле размера r_0 , для вещества которого показатель преломления n , непрерывно возрастая от 1 на границе (при $r=r_0$) внутрь, достигает бесконечно большого значения на некоторой поверхности внутри этого тела (при $r=r_1$). Как и в случае черной дыры, распространение света до границы $r=r_1$ может занимать бесконечно большое время. Тело, однако, придет в движение, не дожидаясь завершения этого процесса. Можно показать, что, как только фронт волны достигает поверхности $r=r_0$, поток энергии-импульса через нее становится, вообще говоря, отличным от нуля и связанная с этим потоком сила приводит в движение тело как целое.

Аналогичным образом, если мысленно окружить черную дыру сферой радиуса $r_0 \geq r_g$, то при прохождении световой волны появится поток энергии-импульса через эту поверхность и вся область внутри r_0 (черная дыра и часть окружающего ее пространства) придет в движение по отношению к внешнему наблюдателю. Для обычной световой волны ее энергия в объеме порядка r_g^3 много меньше $r_g^3 c^4/G$, и влияние такой волны на

*) Падающий наблюдатель, естественно, увидит, что по его часам фронт световой волны пересекает горизонт событий за конечное время.

метрику черной дыры пренебрежимо мало. Поэтому в системе отсчета, связанной с черной дырой, все явления в непосредственной близости от нее происходят практически так же, как в отсутствие излучения. Отдаленный же наблюдатель заметит появление движения этой системы отсчета по отношению к его собственной.

Хотя общая задача о движении черной дыры во внешнем поле не допускает аналитического решения, в том частном случае, когда черная дыра не взаимодействует со своим окружением чрезвычайно сильно, имеется возможность детального описания ее движения в рамках своеобразной теории возмущений. Это возможно, в частности, для движения во внешнем гравитационном поле, если характерный размер черной дыры, определяемый ее массой M , много меньше характерного масштаба L неоднородности гравитационного поля, в котором она движется*). В этом случае действие внешнего гравитационного поля приводит к малому изменению метрики в окрестности черной дыры. Поэтому вне черной дыры, в области, определяемой характерным масштабом M , метрику $g_{\mu\nu}$ можно записать в виде

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{[0]} + \epsilon g_{\mu\nu}^{[1]} + \epsilon^2 g_{\mu\nu}^{[2]} + \dots, \quad (8.5.1)$$

где $g_{\mu\nu}^{[0]}$ — метрика невозмущенной черной дыры (метрика Керра) и $\epsilon = M/L$. Аналогичным образом влияние черной дыры на внешнюю метрику в масштабе порядка L можно считать малым и учесть его в виде поправки, записав внешнюю метрику в виде

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon g_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (8.5.2)$$

Предположение об отсутствии в окрестности черной дыры вещества, падение которого может достаточно быстро изменить ее параметры, и условие слабости взаимодействия черной дыры с внешним полем приводят к тому, что разложения (8.5.1) и (8.5.2) имеют общую область применимости. Иными словами, существует область расстояний от черной дыры, определяемая характерным масштабом $l \sim \epsilon^\alpha M$ ($0 < \alpha < 1$, $M \ll l \ll L$), в которой справедливы оба разложения одновременно. Сравнение (сшива-ние) этих разложений в указанной области позволяет однозначно определить сами разложения.

Описанный метод сшивания асимптотических разложений для изучения движения черных дыр во внешнем поле и взаимодействия черных дыр друг с другом был развит Д'Эсом (1975а, б, 1978, 1979). В применении к рассматриваемой задаче этот метод приводит к следующим результатам [Демянский, Гришук (1974), Д'Эс (1975а, б, 1979), Кэйтс (1980, 1981), Дамур (1983), Торн, Хартль (1985)].

Член $\epsilon g_{\mu\nu}^{[1]}$ в разложении (8.5.1) обращается в нуль. Хотя пространство-время в целом и не обязано быть асимптотически плоским, можно определить массу M , импульс P и угловой момент J черной дыры по параметрам невозмущенной метрики $g_{\mu\nu}^{[0]}$. Неопределенности в определении этих пара-

*) Вообще говоря, неоднородность гравитационного поля характеризуется как радиусом кривизны L , пространства-времени, так и теми масштабами в пространстве (L_2) и времени (L_3/c), на которых эта кривизна существенно изменяется. Под L мы будем понимать минимальную из этих величин $L = \min(L_1, L_2, L_3)$.

метров, связанные с членами $\epsilon^2 g_{\mu\nu}^{[2]}$, имеют следующий порядок:

$$\Delta M \sim \epsilon^2 M, \quad \Delta P \sim \epsilon^2 M, \quad \Delta J \sim \epsilon^2 M^2. \quad (8.5.3)$$

Метрика внешнего пространства $g_{\mu\nu}^{(0)}$ является всюду регулярной, в то время как поправки к ней при формальном распространении на все пространство приводят к особенностям на времениподобной мировой линии γ , отвечающей движению черной дыры. В окрестности этой линии γ можно ввести координаты t, x^i , в которых метрика записывается в виде

$$\begin{aligned} g_{00}^{(0)} &= -1 - E_{ij} x^i x^j + \dots, \\ g_{0i}^{(0)} &= \frac{2}{3} \epsilon_{ijk} B^j_l x^k x^l + \dots, \\ g_{ij}^{(0)} &= \delta_{ij} (1 - E_{kl} x^k x^l) + \dots \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

(здесь $E_{ij} = R_{i0j0}$ и $B_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} R^{kl}_{j0}$ — "электрическая" и "магнитная" части тензора кривизны).

Изменение той части возмущения $g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{(0)}$, которая является конечной на линии движения черной дыры, приводит к небольшой неточности в определении E_{ij} и B_{ij} .

В низшем по ϵ приближении линия движения черной дыры является геодезической, а спин черной дыры переносится вдоль нее параллельно [Д'Эс (1975a)]. Поправки [см. Торн, Хартль (1985)], описывающие отклонение движения черной дыры от геодезического и закона переноса ее спина от закона Ферми-Уолкера (П.12), определяются следующими уравнениями:

$$\frac{dP^i}{dt} = -B^i_j J^j, \quad (8.5.5)$$

$$\frac{dJ^i}{dt} = -\epsilon^i_{jk} E^k_l \frac{1}{M} J^j J^l. \quad (8.5.6)$$

Изменения импульса и спина черной дыры, описываемые этими уравнениями, значительно превосходят неопределенности ΔP^i и ΔJ^i (8.5.3):

$$\begin{aligned} \Delta P^i &\sim \frac{1}{M} \epsilon^i_{jk} B^j_l J^k J^l, \\ \Delta J^i &\sim M^2 E^i_j J^j, \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

связанные с изменением E^i_j и B^i_j . Поэтому указанные эффекты негеодезичности движения вращающейся черной дыры и прецессии ее углового момента в принципе могут наблюдаться.

Следует подчеркнуть, что уравнения (8.5.5) и (8.5.6) совпадают по форме с уравнениями движения пробных вращающихся частиц во внешнем гравитационном поле. Существенным моментом является то, что учет экстремально сильного гравитационного самодействия, присущего черной дыре, не изменяет вида этих уравнений и с точки зрения удаленного наблюдателя она движется во внешнем поле так же, как малое пробное тело.

Аналогичным образом можно показать [Бичак (1980)], что при действии на черную дыру с зарядом Q и массой M внешнего электрического поля E она приобретает ускорение $a = QE/M^*$. Интересно отметить, что Эрнст (1976b) получил точное решение уравнений Эйнштейна—Максвелла, описывающее движение заряженной черной дыры в однородном электрическом поле. Соответствующая метрика в запаздывающих координатах имеет вид

$$ds^2 = B^2(-H du^2 - 2du dr - 2wr^2 du dx + r^2 G^{-1} dx^2) + B^{-2} r^2 G dz^2, \quad (8.5.8)$$

где

$$\begin{aligned} B &= 1 + QE_0 x + \frac{1}{4} E_0^2 (r^2 G + Q^2 x^2), \\ G &= 1 - \dot{x}^2 - 2Mw\dot{x}^3 - Q^2 w^2 \dot{x}^4, \\ H &= -w^2 r^2 G + wr \frac{dG}{dx} + 1 + 6Mwx + 6Q^2 w^2 x^2 - \\ &\quad - 2(M + 2Q^2 wx) r^{-1} + Q^2 r^{-2}. \end{aligned} \quad (8.5.9)$$

Здесь w — ускорение черной дыры, а E_0 — напряженность внешнего электрического поля. При выполнении условия $QE_0 = Mw$ узловые сингулярности, присущие метрике (8.5.8) в общем случае, отсутствуют. Отметим, что отсутствие явной зависимости от времени метрики, описывающей ускоренное движение тела, связано с соответствующим выбором координат. Аналогичным свойством обладает метрика плоского пространства в координатах Риндлера, связанных с равноускоренным движением наблюдателей.

Метод сшивания асимптотических разложений (см. выше) позволяет также исследовать взаимодействие двух черных дыр. В случае, если расстояние между ними значительно превосходит их гравитационные радиусы, а сами дыры движутся друг относительно друга со скоростью, много меньшей скорости света, уравнения движения взаимодействующих черных дыр были получены Д'Эсом (1975b, 1979) [см. также Торн, Хартль (1985)]. Гравитационное поле вблизи каждой из черных дыр описывается возмущенной метрикой Керра, а вдали от черных дыр метрика находится с помощью постньютоновского приближения до нужного порядка точности. Сшивание этих разложений приводит к следующей системе уравнений для движения одной из черных дыр и прецессии ее углового момента в поле другой черной дыры:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + O(\epsilon^4), \quad (8.5.10a)$$

$$\frac{dJ_1}{dt} = [(\vec{\Omega}_1^{(1)} + \vec{\Omega}_1^{(2)} + \vec{\Omega}^{(3)}) \times J_1]. \quad (8.5.10b)$$

Здесь и далее используются обозначения: x_i — положение и v_i — скорость

) Об эффектах, связанных с действием на черную дыру электромагнитного поля, см. также Гальцов и др. (1984).

i -й черной дыры, обладающей массой M_i и угловым моментом J_i ; $r_{21} = x_2 - x_1$, $v_{21} = v_2 - v_1$ — положение и скорость второй черной дыры по отношению к первой; $r = |r_{21}|$, $n = r_{21}/r$; $J_i = |J_i|$ и $j_i = J_i/J_i$ — величина и единичный вектор направления углового момента i -й черной дыры. Параметр малости ϵ равен отношению максимального из гравитационных радиусов к характерному расстоянию между черными дырами. $F_1^{(1)}$ — значение силы, найденное Эйнштейном, Инфельдом, Гофманом (1938), отвечающей геодезическому закону движения одного тела в гравитационном поле, создаваемом вторым телом:

$$F_1^{(1)} = \frac{M_1 M_2}{r^2} \left\{ n \left(1 - \frac{4M_2 + 5M_1}{r} + v_1^2 + 2v_2^2 - 4v_1 v_2 - \frac{3}{2} (v_2 n)^2 \right) - v_{21} [n(3v_2 - 4v_1)] \right\}. \quad (8.5.11)$$

Член $F_1^{(2)}$ в (8.5.10а), равный

$$F_1^{(2)} = \frac{M_1 J_2}{r^3} \{ 6n([j_2 \times n] v_{12}) + 4[j_2 \times v_{12}] - 6[j_2 \times n](v_{12} n) \} + \frac{M_2 J_1}{r^3} \{ 6n([j_1 \times n] v_{12}) + 3[j_1 \times v_{12}] - 3[j_1 \times n](v_{12} n) \}, \quad (8.5.12)$$

описывает дополнительную силу, связанную со спин-орбитальным взаимодействием. Член $O(\epsilon^4)$ в этом же уравнении отвечает спин-спиновому взаимодействию и взаимодействию, связанному с квадрупольным моментом черной дыры, — оба имеют порядок малости ϵ^4 .

Уравнение (8.5.10 б) описывает прецессию углового момента черной дыры по отношению к сопутствующей ортонормированной системе, которая не испытывает вращения по отношению к бесконечно удаленному наблюдателю. Гравимагнитная ($\vec{\Omega}_1^{(1)}$) и геодезическая ($\vec{\Omega}_1^{(2)}$) составляющие угловой скорости этой прецессии и составляющая $\vec{\Omega}_1^{(3)}$, связанная со взаимодействием квадрупольного момента черной дыры с кривизной, равны соответственно

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_1^{(1)} &= \frac{1}{r^3} [-J_2 + 3n(n J_2)], \\ \vec{\Omega}_1^{(2)} &= \frac{M_2}{r^2} \left[\left(\frac{3}{2} v_1 - 2v_2 \right) \times n \right], \\ \vec{\Omega}_1^{(3)} &= \frac{3M_2}{M_1 r^3} n(n J_1). \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

В пределе, когда $M_1 \ll M_2$, эти формулы совпадают с уравнениями движения пробной вращающейся частицы в поле массивного вращающегося тела. (Подробное описание решения последней задачи можно найти в книге Мизнера, Торна, Уилера (1973), где также содержатся ссылки на многочисленные оригинальные работы.)

В противоположном пределе, когда относительная скорость v двух черных дыр близка к скорости света, можно использовать разложение

по малому параметру γ^{-1} , где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. Этот метод был применен Д'Эсом (1975b, 1979) для решения задачи о рассеянии двух ультрарелятивистских черных дыр, движущихся параллельно навстречу друг другу. Исходным пунктом при этом являлось выражение для метрики одиночной равномерно движущейся невращающейся черной дыры в пределе, когда скорость ее движения стремится к скорости света. Эта метрика может быть получена с помощью преобразований из метрики Шварцшильда, записанной в изотропных координатах:

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - M/2r}{1 + M/2r} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (8.5.14)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а M — масса черной дыры. Осуществив лоренцево преобразование

$$\begin{aligned} \bar{t} &= (1 - v^2)^{-1/2} (t + vx), & \bar{y} &= y, \\ \bar{x} &= (1 - v^2)^{-1/2} (x + vt), & \bar{z} &= z, \end{aligned} \quad (8.5.15)$$

перепишем (8.5.14) в следующем виде:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + A)^2 (-d\bar{t}^2 + d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2) + \\ &+ \left[\left(\frac{1 - A}{1 + A} \right)^2 - (1 + A)^4 \right] \frac{(d\bar{t} - v d\bar{x})^2}{(1 - v^2)}, \end{aligned} \quad (8.5.16)$$

где

$$A = \frac{M}{2r} = \frac{\mu(1 - v^2)}{2[(\bar{x} - v\bar{t})^2 + (1 - v^2)(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)]^{1/2}}, \quad (8.5.17)$$

$$\mu = \gamma M = M/\sqrt{1 - v^2}.$$

Переходя к пределу $v \rightarrow 1$ в (8.5.16) при постоянном значении μ и обозначая $\bar{t} - \bar{x} = \bar{v}$, $\bar{t} + \bar{x} = \bar{u}$, получаем [Айхельбург, Сексл (1971)]

$$ds^2 = -d\bar{v} d\bar{u} + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 + 4\mu \left[\frac{1}{|\bar{v}|} - \delta(\bar{v}) \ln(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \right] d\bar{v}^2. \quad (8.5.18)$$

Это выражение с помощью преобразования координат $du = d\bar{u} - \frac{4\mu}{|\bar{v}|} d\bar{v}$, $v = \bar{v}$ можно привести к виду

$$ds^2 = -du dv + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 - 4\mu \delta(v) \ln(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) dv^2. \quad (8.5.19)$$

Из этой формы метрики видно, что соответствующее гравитационное поле представляет собой особый случай аксиально-симметричной плоской гравитационной волны, сосредоточенной на поверхности $v = 0$, разделяющей два плоских полупространства: $v > 0$ и $v < 0$. Выполненная предельная процедура приводит к изменению алгебраического типа тензора Вейля: метрика (8.5.19) имеет тип N вместо типа D , которым обладала исходная метрика (8.5.14) *). Соответствующий тензор кривизны всюду обращается

*) Это свойство метрики Шварцшильда было обнаружено Пирани (1959). Позднее Пенроуз (1976) показал, что этим свойством обладает пространство-время общего вида. А именно, с точки зрения наблюдателя, скорость движения которого приближается к скорости света и который пользуется параметром времени γt , где $\gamma =$

в нуль, за исключением поверхности $v = 0$, на которой его отличные от нуля компоненты имеют особенности типа $\delta(v)$.

В случае, когда имеются две ультрарелятивистские черные дыры, движущиеся параллельно навстречу друг другу, их гравитационное поле, до взаимодействия сконцентрированное в виде двух плоских волн, описываемых метриками (8.5.19), после взаимодействия испытывает искажение, вызванное рассеянием этих гравитационных волн при прохождении друг через друга. Д'Эс (1978) показал, что если прицельный параметр сравним с величиной $M\gamma^2$, где M — характерная масса черных дыр, а γ — типичный лоренц-фактор в системе центра масс, то возникает гравитационное излучение с характерной мощностью ~ 1 (в единицах c^5/G) в виду узких пучков с телесным углом $\sim \gamma^{-2}$ по направлениям движения черных дыр. Причина этого излучения состоит в появлении быстропеременного ускорения черных дыр в момент близкого прохождения возле друг друга.

Если прицельный параметр сравним с величиной $\mu = M\gamma$, то излучение мало вдоль направления движения дыр вплоть до углов $\theta \lesssim \gamma^{-1}$. При больших углах (в диапазоне $\gamma^{-1} \ll \theta \leq 1$) суммарная энергия гравитационного излучения в единицу телесного угла имеет величину $dE/d\Omega \approx 0,248 M\gamma/2\pi$. В предположении, что при лобовом столкновении черных дыр равной массы гравитационное излучение довольно изотропно, Д'Эс (1978) пришел к выводу, что эффективность преобразования энергии черных дыр 2μ в энергию излучения ΔE составляет примерно 25%: $\Delta E/2\mu \approx 0,248$ [Смарт и др. (1976); см. также Смарт (1977, 1979), Бовин (1983)].

Общее ограничение на максимальную эффективность превращения в энергию гравитационного излучения ΔE энергии черных дыр при их лобовом столкновении можно получить, исходя из теоремы Хокинга [Пенроуз (1974), Смарт и др. (1976)]. Если черные дыры обладают одинаковой массой M и их скорости движения на бесконечности навстречу друг другу в системе центра масс равны v , то для максимальной эффективности $\epsilon = \Delta E/2\mu$ имеем

$$\epsilon \leq 1 - \sqrt{\frac{1-v^2}{2}}.$$

Как показывают приведенные выше оценки, реальная эффективность для ультрарелятивистских черных дыр составляет $\approx 25\%$ от максимальной $\epsilon(v=1) = 1$. При столкновении нерелятивистских черных дыр она почти на два порядка меньше. Так, для энергии гравитационного излучения при лобовом столкновении двух невращающихся черных дыр с одинаковой массой, обладавших нулевой относительной скоростью на бесконечности, численный счет дает выражение [Смарт (1979); см. также Петрич и др. (1985)]

$$\Delta E = 2,5 \cdot 10^{-3} M.$$

Напомним (см. § 3.3), что количество излученной энергии при радиальном

$= (1-v^2)^{-1/2}$ и τ — собственное время, геометрия окружающего пространства-времени стремится к геометрии плоской гравитационной волны. В пределе $\gamma \rightarrow \infty$ мировая линия этого наблюдателя — нулевая геодезическая, а $\gamma\tau$ — аффинный параметр вдоль нее.

падении с параболической скоростью *пробной* частицы с массой m на черную дыру описывается формулой

$$\Delta E = 0,01 m^2 / M.$$

Отметим, что эта же формула хорошо воспроизводит приведенный выше результат численного счета, если в нее в качестве m подставить приведенную массу двух черных дыр $m = M/2$.

При воздействии внешнего поля черная дыра испытывает деформацию. Рассмотрим (кратко), как изменяются свойства черной дыры при "внесении" ее в гравитационное поле, создаваемое стационарным распределением вещества. Эта задача допускает довольно полное решение в том случае, когда черная дыра не вращается, а гравитационное поле является аксиально-симметричным [Израэль, Кхан (1964), Дорошкевич и др. (1965*), Мизак, Жекерес (1966), Израэль (1973), Героч, Хартль (1982)]. Обобщение на случай вращающейся черной дыры можно найти в работе Томиматсу (1984).

Прежде всего напомним [см., например, Крамер и др. (1980)], что статическое аксиально-симметричное вакуумное гравитационное поле описывается с помощью метрики Вейля

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} [e^{2V} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (8.5.20)$$

где U и V являются функциями от ρ и z и удовлетворяют уравнениям

$$U_{,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_{,\rho} + U_{,zz} = 0, \quad (8.5.21a)$$

$$V_{,\rho} = \rho (U_{,\rho}^2 - U_{,z}^2), \quad V_{,z} = 2\rho U_{,\rho} U_{,z}. \quad (8.5.21b)$$

Нетрудно убедиться, что (8.5.21a) обеспечивает выполнимость условий интегрируемости системы (8.5.21b). Поскольку решение системы (8.5.21b) для известной функции $U(\rho, z)$ легко находится в квадратурах, вакуумная метрика (8.5.20) однозначно определяется выбором решения уравнения (8.5.21a). В частности, метрика Шварцшильда в этих координатах отвечает следующему решению:

$$U = U_S \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right), \quad V = V_S \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} \right), \quad (8.5.22)$$

где

$$\lambda = \frac{R_+ + R_-}{2M}, \quad \mu = \frac{R_+ - R_-}{2M}, \quad R_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm M)^2}; \quad (8.5.23)$$

при этом горизонт событий H определяется условием

$$\rho = 0, \quad -M \leq z \leq M. \quad (8.4.24)$$

Согласно теореме единственности (см. § 6.3) это решение является единственным, описывающим черную дыру в вакууме в асимптотически плоском пространстве-времени. Всякое другое *вакуумное* решение, обладающее регулярным горизонтом*), не может быть асимптотически плоским.

*) Строго говоря, требуется регулярность так называемого горизонта Киллинга, определяемого в статическом пространстве условием $\partial_t \cdot \partial_t = 0$, где ∂_t — векторное

Поэтому, строго говоря, возмущенная черная дыра обязательно описывается невакуумным решением уравнений Эйнштейна. В простейшем случае можно считать, что вещество, создающее внешнее гравитационное поле, расположено на некотором расстоянии от черной дыры. Тогда в окрестности ее горизонта гравитационное поле описывается вакуумной метрикой Вейля (8.5.20). И хотя точное решение подобной полной задачи удастся найти лишь для очень частных случаев распределения вещества, изучение свойств вакуумных решений Вейля вблизи регулярного горизонта позволяет получить довольно полную информацию о возможном влиянии внешних воздействий на поверхность черной дыры *).

Решение, описывающее возмущенную черную дыру, можно записать в следующем виде [Героч, Хартль (1982)] :

$$U = U_S + \hat{U}, \quad V = V_S + \hat{V}, \quad (8.5.25)$$

где U_S и V_S даются выражениями (8.5.22), а $\hat{U}$ является решением однородного уравнения (8.5.21 а), удовлетворяющим условию регулярности на отрезке $\rho = 0$, $-M \leq z \leq M$ и в некоторой его окрестности и принимающим на его концах одинаковые значения

$$\hat{U}(\rho = 0, z = -M) = \hat{U}(\rho = 0, z = M) \equiv u. \quad (8.5.26)$$

Значение $\hat{V}$ однозначно определяется из уравнения (8.5.21 б) при условии, что $V = 0$ на участках оси $\rho = 0$, лежащих вне вещества. Условие (8.5.26), связанное с отсутствием узловых сингулярностей, гарантирует обращение в нуль суммарной силы, действующей со стороны внешнего поля на черную дыру как целое, что обеспечивает возможность существования регулярного статического решения. Используя второе уравнение из (8.5.21 б), можно показать, что на горизонте событий H имеет место соотношение

$$\hat{V} = 2\hat{U} - 2u. \quad (8.5.27)$$

С помощью преобразования координат

$$\rho = e^u r \sqrt{1 - \frac{2M_0}{r}} \sin \theta, \quad z = e^u (r - 2M_0) \cos \theta, \quad (8.5.28)$$

$$M_0 = M e^{-u} \quad (8.5.29)$$

можно метрику (8.5.20) привести к следующему виду:

$$ds^2 = -e^{2\hat{U}} \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right) dt^2 + e^{2\hat{V} - 2\hat{U} + 2u} \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + e^{-2\hat{V}} \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (8.5.30)$$

поле Киллинга. В статическом асимптотически плоском пространстве горизонт Киллинга совпадает с горизонтом событий (см. § 6.3).

*) Интересно отметить, что хотя метрика Вейля, описывающая статическую деформированную аксиально-симметричную черную дыру, принадлежит к общему типу I по Петрову, на горизонте событий она имеет тип D [Пападопулос, Ксантопулос (1984)].

Горизонт событий H в этих координатах описывается уравнением $r = 2M_0$ и двумерная метрика на его поверхности с учетом (8.5.27) записывается так:

$$ds^2 = 4M_0^2 (e^{2\hat{U}-2u} d\theta^2 + e^{-2\hat{U}+2u} \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (8.5.31)$$

Нетрудно убедиться, что поверхность горизонта представляет собой деформированную аксиально-симметричным образом сферу*), площадь которой

$$A = 16\pi M_0^2. \quad (8.5.32)$$

Действие внешнего гравитационного поля, в качестве потенциала которого выступает величина $\exp \hat{U}$, на черную дыру в известной мере аналогично действию этого поля на эластичное массивное тело. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай, когда значение $\hat{U}$ вблизи полюсов больше значения $\hat{U}$ на экваторе. В этом случае на любое пробное тело, покоящееся вблизи полюса, будет действовать сила, стремящаяся приблизить его к экватору. В соответствии с этим, как видно из соотношения (8.5.31), поверхность горизонта оказывается сплюснутой у полюсов. Поверхностная гравитация κ постоянна на поверхности горизонта:

$$\kappa = e^u / 4M_0. \quad (8.5.33)$$

Отличие наблюдаемого на бесконечности значения массы M от величины M_0 , определяющей площадь горизонта событий и играющей роль неприводимой массы (см. § 8.1), объясняется следующим образом. Рассмотрим процесс "внесения" шварцшильдовской черной дыры (для которой, очевидно, $M = M_0$) в заданное внешнее гравитационное поле. Если этот процесс осуществляется достаточно медленно, то площадь поверхности A черной дыры не изменяется и, следовательно, в этом процессе сохраняется постоянная величина M_0 . Величина же $M = e^u M_0$ испытывает изменение при изменении гравитационного потенциала e^u внешнего поля в месте, где находится черная дыра. Разность $M - M_0 = M_0 (e^u - 1)$ представляет собой работу, совершенную внешним гравитационным полем при "внесении" в него черной дыры. Можно показать [Героч, Хартль (1982)], что при выполнении сильного энергетического условия (см. Приложение) потенциал u принимает только неположительные значения.

Приведем в качестве примера, иллюстрирующего эти общие рассуждения, явное выражение для метрики, описывающей черную дыру во внешнем квадрупольном поле [Дорошкевич и др. (1965*)]:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \frac{1}{4} q (3\lambda^2 - 1) (3\mu^2 - 1), \\ \hat{V} &= -3q\lambda (1 - \mu^2) - \frac{9}{16} q^2 (\lambda^2 - 1) (1 - \mu^2) (9\mu^2\lambda^2 - \lambda^2 - \mu^2 + 1), \end{aligned} \quad (8.5.34)$$

где q — параметр, характеризующий квадрупольный момент системы, создающей внешнее гравитационное поле. На горизонте $\lambda = 1$, $\mu = z/M$, и поэто-

*) Следует упомянуть, что возможны вакуумные аксиально-симметричные статические метрики, описывающие пространство-время вблизи горизонта, с топологией тора [см., например, Героч, Хартль (1982), Ксантопулос (1983) и ссылки в этих работах]. Однако, как это следует из теоремы Хокинга (см. § 6.2), при выполнении условия энергодоминантности внешнее пространство в этом случае не может быть одновременно регулярным и асимптотически плоским.

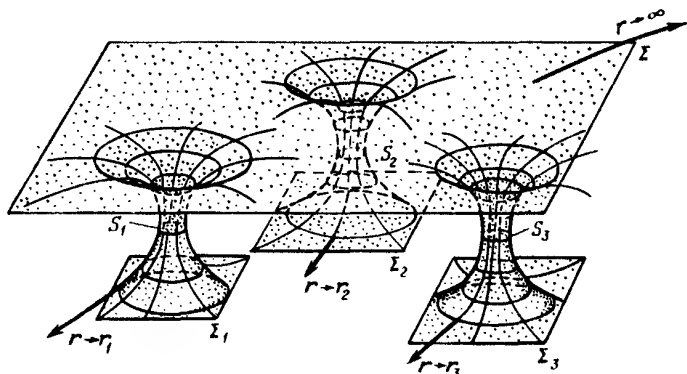


Рис. 73. Мгновенно-статическая конфигурация трех взаимодействующих черных дыр (двумерное пространственное сечение пространства-времени)

мы нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае $u = q$. Гауссова кривизна поверхности горизонта событий равна

$$K = \frac{e^q}{4M_0^2} (1 + 3q - 12q\mu^2 - 9q^2\mu^2 + 9q^2\mu^4). \quad (8.5.35)$$

Постоянное внешнее квадрупольное поле, описываемое решением (8.5.34), может быть создано удаленными покоящимися массами. Это решение также приближенно описывает влияние на черную дыру удаленных свободных масс, скорости движения которых под действием взаимного притяжения вначале малы, а поле почти статично.

При получении полных точных аксиально-симметричных стационарных решений, описывающих поведение черной дыры в гравитационном поле, основную трудность, как уже указывалось выше, составляет нахождение решения в области, где присутствует материя. К важным случаям, для которых можно получить точные решения, относятся ситуации, когда черная дыра находится либо в однородном электрическом [Эрнст (1976b)], либо в однородном магнитном поле [Эрнст (1976a), Эрнст, Уайлд (1976), Гальцов, Петухов (1978*), Гальцов (1980*), Уайлд, Кернс (1980), Алиев и др. (1980*), Уайлд и др. (1981), Крори и др. (1983, 1984), Дадлих (1983), Дхираудхар, Дадлих (1984a, b)].

Интересная возможность изучения взаимодействия черных дыр состоит в рассмотрении так называемых *мгновенно-статических конфигураций*, описывающих систему взаимодействующих черных дыр в момент времени, когда все они покоятся [Мизнер, Уилер (1957), Мизнер (1960, 1963), Линдквист (1963), Брилл, Линдквист (1963), Гиббонс (1972), Боуен, Йорк (1980), Кулкарни и др. (1983), Боуен и др. (1984), Кулкарни (1984)]. Эта возможность основывается на том, что в момент временной симметрии метрика $g_{\mu\nu}$ пространства-времени выбирается так, что удовлетворяются условия $g_{\mu 0} = -\delta_{\mu}^0$, $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$, а трехмерная геометрия пространства $h_{ij} = g_{ij}$ находится путем решения уравнения

$$R^{(3)} = 0, \quad (8.5.36)$$

где $R^{(3)}$ — скаляр трехмерной кривизны метрики h_{ij} . Если присутствует электромагнитное поле, то в момент временной симметрии отличны от нуля только компоненты $E_i = F_{i0}$, а начальные условия в этот момент времени для системы уравнений Эйнштейна — Максвелла имеют вид

$$R^{(3)} = 2E_i E^i, \quad E^i{}_{;i} = 0. \quad (8.5.37)$$

Решение уравнений (8.5.37), описывающее систему N взаимодействующих заряженных черных дыр [Линдквист (1963), Брилл, Линдквист (1963)], выглядит следующим образом:

$$dl^2 \equiv h_{ij} dx^i dx^j = (\chi\psi)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (8.5.38)$$

$$E_i = [\ln(\chi/\psi)]_{,i},$$

где

$$\chi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{|r - r_i|}, \quad \psi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{|r - r_i|},$$

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i > 0, \quad r = (x, y, z).$$

(Двумерное сечение соответствующей метрики для случая $N = 3$ схематично изображено на рис. 73.) Масса M_i и заряд Q_i i -й черной дыры, определяемые по асимптотикам решения на бесконечности листа Σ_i (при $r \rightarrow r_i$), суть

$$M_i = \alpha_i + \beta_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i}{|r_i - r_j|}, \quad (8.5.39a)$$

$$Q_i = \beta_i - \alpha_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\beta_i \alpha_j - \alpha_i \beta_j}{|r_i - r_j|}. \quad (8.5.39b)$$

Масса M и заряд Q системы взаимодействующих черных дыр, определяемые по асимптотикам решения на бесконечности листа Σ (при $r \rightarrow \infty$), равны

$$M = \sum_{i=1}^N (\alpha_i + \beta_i), \quad Q = \sum_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i). \quad (8.5.40)$$

[При $\beta_i = \alpha_i$ решение (8.5.38) описывает систему взаимодействующих незаряженных черных дыр — см. Мизнер, Уилер (1957), Мизнер (1960, 1963), Гиббонс (1972).]

Нетрудно убедиться, что

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i, \quad M_{\text{int}} \equiv M - \sum_{i=1}^N M_i = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i}{|r_i - r_j|} < 0. \quad (8.5.41)$$

Эти соотношения показывают, что заряды черных дыр складываются аддитивно, в то время как гравитационный дефект масс, связанный со взаимодействием черных дыр, приводит к тому, что суммарная масса системы оказывается меньше суммы их масс. Обсуждение свойств двумерных поверхностей, отвечающих положению горизонтов видимости в момент вре-

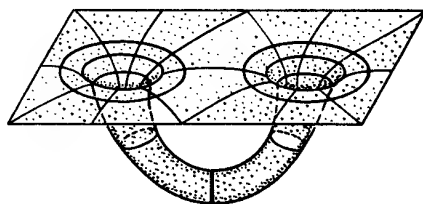


Рис. 74. Решение типа кротовой норы (двумерное пространственное сечение пространства-времени)

менной симметрии для системы взаимодействующих черных дыр, см. Брилли, Линдквист (1963), Гиббонс (1972), Бишоп (1984).

Мизнер (1960, 1963) и Линдквист (1963) обобщили решение (8.5.38) на случай, когда вместо системы черных дыр имеется набор "кротовых нор" (двумерное сечение подобного пространства в случае одной "кротовой норы" схематично изображено на рис. 74).

Подчеркнем еще раз, что в общем случае система черных дыр, описываемая решением (8.5.38), не может оставаться в покое все время. Исключением является ситуация, когда $\alpha_i = 0$ и для всех черных дыр выполняется условие $M_i = Q_i$ [Хартль, Хокинг (1972)]. Если $\alpha_i \neq 0$, то выражение (8.5.38) может быть использовано в качестве начальных условий при изучении динамики движения черных дыр с помощью численных методов [см., например, Смарри др. (1976), Смарр (1979)].

Описанный выше метод построения геометрии пространства-времени для системы черных дыр в момент временной симметрии может быть распространен на случай, когда черные дыры обладают вращением [Боуэн, Йорк (1980), Боуэн и др. (1984), Кулкарни (1984)]. Относительно возможности существования равновесных стационарных аксиально-симметричных конфигураций из вращающихся черных дыр см. Оохара, Сато (1981), Кихара, Томиматсу (1982), Томиматсу, Кихара (1982), Сато (1983), Томиматсу (1983), Ямазаки (1983 а, b), Бичак, Хоенселаерс (1985) и ссылки в этих работах.

КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ. РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ

§ 9.1. Роль квантовых эффектов в физике черных дыр

До сих пор при описании взаимодействия вещества и физических полей с черными дырами полностью игнорировались квантовые особенности этого взаимодействия. Квантовые эффекты действительно несущественны для черных дыр с массой порядка солнечной (или больше). Однако для черной дыры малой массы эти эффекты не только не малы, но приводят к качественному изменению картины ее эволюции. Они, по-видимому, также являются определяющими в тех областях внутри черной дыры, в которых, в соответствии с классической теорией, должны находиться сингулярности пространства-времени.

Согласно современным квантовым представлениям физический вакуум (т.е. состояние, в котором отсутствуют реальные частицы) — довольно сложное образование. В вакууме непрерывно происходит рождение, взаимодействие и уничтожение виртуальных (короткоживущих) частиц. В отсутствие внешних полей вакуум устойчив, т.е. все протекающие в нем процессы не приводят к появлению реальных (долгоживущих) частиц. При наличии внешнего поля часть виртуальных частиц, взаимодействуя с ним, может приобрести достаточную энергию, чтобы стать реальными. Этот процесс приводит к эффекту квантового рождения частиц из вакуума внешним полем.

Вероятность рождения частиц во внешнем статическом поле можно оценить следующим образом. Пусть напряженность поля есть Γ , а заряд рождающихся частиц равен g . Согласно соотношению неопределенностей время жизни виртуальной пары частиц, обладающих энергией mc^2 , порядка $\hbar/mc^2$. За это время, двигаясь со скоростью, не превосходящей скорости света c , частицы могут удалиться друг от друга на характерное расстояние $l_0 \sim \hbar/mc$. Вероятность обнаружить пару таких частиц на большем расстоянии l пропорциональна $\exp(-l/l_0)$. Эта же величина входит в выражение для вероятности рождения реальной пары частиц с энергией mc^2 , если расстояние l таково, что работа $g\Gamma l$, произведенная на нем полем, равна mc^2 . Поэтому вероятность w рождения частиц в поле напряженности Γ описывается выражением вида

$$w = A \exp(-\beta m^2 c^3 / \hbar g \Gamma), \quad (9.1.1)$$

где постоянная β (безразмерная константа порядка единицы) и предэкспоненциальный множитель A зависят от более детальных характеристик поля.

Хорошо известным примером рождения частиц во внешнем поле является рождение электрон-позитронных пар в интенсивном внешнем электри-

ческом поле. Для скорости рождения частиц в единице объема dV за единицу времени dt однородным электрическим полем имеет место следующее выражение, полученное Швингером (1951):

$$\frac{dN}{dt dV} = \frac{e^2 E^2}{\pi^2 \hbar^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(-\pi m^2 c^3 n / e E \hbar), \quad (9.1.2)$$

где E — напряженность электрического поля. Нетрудно убедиться, что для полей с напряженностью, много меньшей критической $E_{cr} = m^2 c^3 / e \hbar$, это соотношение согласуется с (9.1.1), причем численный коэффициент β оказывается равным π .

По-видимому, первой работой, в которой было обращено внимание на важную роль квантовых эффектов в физике черных дыр, была работа Маркова, Фролова (1970). В ней было показано, что квантовый эффект рождения пар заряженных частиц в поле заряженной черной дыры приводит к уменьшению ее электрического заряда практически до его уничтожения. Если потенциал на поверхности черной дыры Q/r_+ достаточно велик, чтобы происходило рождение пар ($eQ/r_+ > mc^2$, m — масса и e — заряд электрона), а заряд черной дыры превосходит $\hbar c/e$, то условия применимости приближения однородного поля оказываются выполненными, и для оценки скорости рождения заряженных частиц полем заряженной черной дыры можно использовать соотношение Швингера (9.1.2).

Аналогичное явление квантового рождения частиц — см. Зельдович (1971*, 1972*), Старобинский (1973*), Мизнер (1972), Унру (1974) — происходит в гравитационном поле вращающихся черных дыр. Напомним, что рассмотренное в предыдущей главе явление суперрадиации имеет чисто классический характер. Это проявляется, в частности, в том, что коэффициент усиления не зависит от постоянной Планка. Как и другие классические процессы, явление суперрадиации можно описать на квантовом языке. При подобном описании это явление состоит в увеличении числа квантов в отраженной волне по сравнению с числом квантов в волне падающей. Действительно, энергия волны заданной частоты при классическом описании пропорциональна квадрату ее амплитуды, а при квантовом — числу квантов. Поэтому увеличение амплитуды волны при неизменной частоте означает увеличение общего числа квантов поля.

Рассмотренное классическое явление суперрадиации имеет квантовый аналог: спонтанное рождение частиц из вакуума в гравитационном поле вращающейся черной дыры. Поскольку в физическом вакууме равно нулю лишь среднее значение поля, а сами поля флуктуируют около нулевых значений, то амплитуда тех вакуумных флуктуаций, для которых выполняется условие усиления, непрерывно возрастает, что проявляется в рождении реальных квантов поля.

Эффект рождения квантов в поле вращающейся черной дыры можно описать и несколько иным образом, при котором роль эргосферы проявляется более отчетливо. Чтобы произошло рождение реальной частицы, вылетающей из черной дыры без нарушения закона сохранения энергии, необходимо, чтобы вторая частица виртуальной пары приобрела отрицательную энергию. Это оказывается возможным, если она находится в эргосфере и обладает определенным значением углового момента.

Работу, необходимую для превращения виртуальных частиц в реальные, совершает гравитационное поле черной дыры. Рожденные частицы, вылетающие из черной дыры, обязательно обладают угловым моментом, совпадающим по направлению с угловым моментом черной дыры. Поэтому вне вращающейся черной дыры появляется поток частиц, уносящих ее энергию и момент. Характерная частота этого излучения порядка угловой скорости Ω^H вращения черной дыры, а полный поток энергии и момента

$$-\frac{dE}{dt} \sim \hbar (\Omega^H)^2, \quad (9.1.3)$$

$$-\frac{dJ}{dt} \sim \hbar \Omega^H. \quad (9.1.4)$$

При заданной массе M максимальное значение угловой скорости $\Omega^H = c^3/2GM$ достигается при $J = GM^2/c$ — экстремальная черная дыра. Поэтому скорость потери энергии и углового момента вращающейся черной дырой массы M в результате спонтанного рождения частиц в ее поле не превосходит следующих значений*):

$$-\frac{dE}{dt} \sim \hbar \frac{c^6}{G^2 M^2} \sim 10^{-17} \frac{\text{эрг}}{c} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2, \quad (9.1.5)$$

$$-\frac{dJ}{dt} \sim \hbar \frac{c^3}{GM} \sim 10^{-22} \text{ эрг} \left(\frac{M_\odot}{M} \right). \quad (9.1.6)$$

Приведенные оценки показывают, что указанный эффект существен лишь для черных дыр с малой (значительно меньше солнечной) массой. Заметим, что приведенные формулы относятся к случаю рождения безмассовых частиц (фотонов, нейтрино, гравитонов) — скорость рождения массивных частиц существенно меньше.

Если черная дыра обладает одновременно электрическим зарядом Q и угловым моментом J , то рождение частиц будет приводить к уменьшению и углового момента, и заряда. Если рождающаяся частица, вылетающая на бесконечность, обладает энергией ϵ , угловым моментом j и зарядом e , то эти параметры удовлетворяют неравенству, вытекающему из условия (8.1.23) для суперрадиационных мод:

$$\epsilon \leq \Omega^H j + \Phi^H e, \quad (9.1.7)$$

где Ω^H — угловая скорость, а Φ^H — электрический потенциал черной дыры.

Поскольку энергия, угловой момент и заряд, уносимые рожденными частицами, удовлетворяют тому же ограничению (9.1.7), что и параметры излучения при суперрадиации, то нетрудно убедиться (см. § 8.1), что в

*) Подчеркнем, что соотношения (9.1.3) — (9.1.6), основанные на соображениях, связанных с анализом размерностей, дают лишь грубую оценку. Свойства излучения вращающейся черной дыры обсуждаются в § 9.5. Здесь отметим лишь, что интенсивность этого излучения существенно зависит от спина частиц. Для гравитонов значения dE/dt и dJ/dt при $J = GM^2/c$ на порядок меньше приведенного в (9.1.5) — (9.1.6), а для нейтрино — меньше на три порядка.

процессе этого излучения площадь черной дыры не уменьшается. Этот результат означает, что неприводимая масса черной дыры для таких процессов также не уменьшается; на рождение частиц расходуется запасенная черной дырой электростатическая энергия или энергия вращения. После исчерпания этой энергии описанные выше процессы прекращаются.

Важное открытие, приведшее к существенному изменению представлений о роли квантовых эффектов в физике черных дыр, было сделано Хокингом (1974, 1975). Открытие состояло в том, что квантовый процесс рождения частиц происходит и в нейтральных невращающихся черных дырах, причем черная дыра рождает и излучает частицы так, как если бы вместо нее имелось черное тело, нагретое до температуры

$$\theta = \hbar \kappa / 2\pi c k, \quad (9.1.8)$$

где k — постоянная Больцмана, а κ — поверхностная гравитация черной дыры, характеризующая "напряженность" гравитационного поля вблизи ее поверхности (для шварцшильдовской черной дыры $\kappa = c^4/4GM$)*).

Результат, полученный Хокингом, допускает следующую интерпретацию. Поскольку любая частица вне шварцшильдовской черной дыры имеет положительную энергию, то квантовый процесс рождения частиц в поле такой дыры происходит так, что одна из частиц пары обязательно "рождается" под горизонтом. (Напомним, что под шварцшильдовским горизонтом векторное поле Киллинга $\xi^\mu \partial_\mu = \partial_t$ — пространственноподобное и энергия $\epsilon = -\xi^\mu p_\mu$ частицы с импульсом p_μ ($p^\mu p_\mu < 0$) не является знакоопределенной.) Для грубой оценки вероятности этого подбарьерного процесса можно использовать общее выражение (9.1.1). Имеется, однако, существенная особенность гравитационного взаимодействия, связанная с его тензорным характером и в конечном счете с выполнимостью принципа эквивалентности. Она состоит в том, что в качестве гравитационного заряда системы, характеризующего ее гравитационное взаимодействие, выступает величина ее массы m , связанной с полной энергией ϵ системы соотношением $\epsilon = mc^2$. Поэтому для оценки вероятности рождения частицы в статическом гравитационном поле в формуле (9.1.1) следует положить $g = m$ и $\Gamma = \kappa$. В результате находим, что вероятность рождения частиц в поле черной дыры

$$w \sim \exp(-\beta \epsilon c / \hbar \kappa) = \exp\left(-\frac{\beta}{2\pi} \frac{\epsilon}{k\theta}\right). \quad (9.1.9)$$

Хотя указанные соображения далеки от строгости, тем не менее они приводят к правильному выражению, полученному Хокингом (при этом числовой множитель β оказывается равным 2π).

В процессе излучения Хокинга черная дыра теряет массу и, следовательно, площадь ее поверхности уменьшается. В общем случае, когда черная дыра обладает зарядом и вращением, процесс идет одновременно с описанными выше процессами, приводящими к потере углового момента и заряда.

Результат воздействия внешнего поля на вакуум не исчерпывается лишь эффектом рождения частиц. Дело в том, что даже те виртуальные частицы, которые не приобретают достаточной энергии, чтобы стать реальными, и в конце концов исчезают, за время их короткой жизни испытывают тем не

*) Строго говоря, спектр излучения черной дыры отличен от теплового из-за эффектов рассеяния на ее гравитационном поле — см. § 9.5 и рис. 78.

менее действие внешнего поля и движутся иначе, чем в его отсутствие. Это приводит к тому, что вклад таких виртуальных частиц в различные локальные физические наблюдаемые (например, в среднее значение тензора энергии-импульса $\langle T_{\mu\nu} \rangle$) зависит от величины и других характеристик внешнего поля. Иными словами, изменение вакуумных значений локальных наблюдаемых при наличии внешнего поля по сравнению с их исходными значениями в отсутствие поля (а именно эта разность и является величиной, регистрируемой приборами) есть функционал внешнего поля. Этот эффект зависимости локальных наблюдаемых от внешнего поля носит название *поляризации вакуума*. Он может иметь место и в том случае, когда внешнее поле по каким-либо причинам не приводит к рождению частиц.

Разделение частиц на реальные и виртуальные, имеющее точный смысл в отсутствие внешнего поля, теряет однозначность в области пространства-времени, где внешнее поле является сильным. С этим связана известная трудность определения понятия частицы в сильном гравитационном поле [обсуждение этого вопроса см., например, Биррел, Девис (1982)]. Поэтому не всегда удастся разделить вклады реальных и виртуальных частиц в средние значения локальных наблюдаемых или точно ответить на вопрос, где именно родилась та или иная частица. Возникающие при этом неопределенности являются в конечном счете проявлением общих соотношений неопределенностей, присущих квантовой механике.

Одно из проявлений эффекта поляризации вакуума — изменение уравнений, описывающих среднее значение $\langle \Phi \rangle$ физического поля Φ , создаваемого внешним источником J . Поле Φ от источника J изменяет состояние виртуальных вакуумных частиц, взаимодействующих с этим полем. Возникающие дополнительные квантовые поляризационные поправки в уравнении для $\langle \Phi \rangle$ учитывают обратное действие изменения состояния виртуальных частиц на исходное поле Φ . Поскольку квантовый процесс возникновения и уничтожения виртуальных пар имеет случайный характер, то "мгновенное" значение поля Φ не совпадает с его средним значением $\langle \Phi \rangle$; поле испытывает *квантовые флуктуации*. Поэтому само описание поля в терминах его средних значений имеет ограниченную область применимости. Это описание пригодно в той ситуации, когда квантовые флуктуации малы по сравнению со средним значением поля.

Сделанные общие замечания, касающиеся возможных проявлений квантовой природы физических полей и частиц, в полной мере применимы при рассмотрении квантовых эффектов в черных дырах. Роль внешнего источника, создающего поле, в этом случае играет массивное тело, коллапс которого приводит к образованию черной дыры.

Качественно оценить значение флуктуационных эффектов в черных дырах можно с помощью следующих простых рассуждений. Предположим, что в области пространства-времени с характерным размером l произошла флуктуация метрики и ее значение g отклонилось от среднего значения $\langle g \rangle$ на величину δg . При этом кривизна в этой области изменится на величину порядка $\delta g / (l^2 \langle g \rangle)$, а значение действия S для гравитационного поля испытает изменение порядка

$$\delta S \sim \frac{\delta g'}{\langle g \rangle} l^2 \frac{c^2}{G}. \quad (9.1.10)$$

Вероятность подобной квантовой флуктуации значительна только в том случае, когда $\delta S \sim \hbar$. Поэтому для величины флуктуации метрики $\delta g / \langle g \rangle$ в пространственно-временной области размером l получается следующая оценка:

$$\frac{\delta g}{\langle g \rangle} \sim \frac{l_{\text{Pl}}^2}{l^2}, \quad (9.1.11)$$

где $l_{\text{Pl}} = (\hbar G/c^3)^{1/2} \approx 1,6 \cdot 10^{-33}$ см — планковская длина. Таким образом, флуктуации метрики, достигающие значения 1 на планковских масштабах, малы и, вообще говоря, несущественны для значительно больших масштабов. Поэтому приближение среднего поля, безусловно, применимо при описании черных дыр с массой, значительно большей планковской массы $m_{\text{Pl}} \sim 10^{-5}$ г. Можно ожидать [Йорк (1983)], что описанные квантово-гравитационные флуктуации приведут к своеобразному квантовому "дрожанию" горизонта событий. Для сферической черной дыры с массой M величина амплитуды "дрожания" δr_g гравитационного радиуса имеет на основании (9.1.11) следующий вид:

$$\delta r_g \sim l_{\text{Pl}}^2 / r_g. \quad (9.1.12)$$

Интересно отметить, что хотя эта величина мала для обсуждаемых нами черных дыр с $M \gg m_{\text{Pl}}$, само существование этого эффекта качественно меняет идеализированное классическое описание коллапса тела или падения частиц в черную дыру с точки зрения удаленного наблюдателя. Вместо формально бесконечного выражения

$$\Delta t \sim \int_{r_g}^R \frac{dr}{1 - r_g/r} \quad (9.1.13)$$

для длительности этих процессов по часам удаленного наблюдателя следует ожидать появления конечной величины $\Delta t \sim r_g \ln(r_g/l_{\text{Pl}})$ в результате замены $r_g \rightarrow r_g + \delta r_g$ в нижнем пределе интегрирования*).

Обсудим теперь возможную роль поляризационных эффектов. Можно показать [Де Витт (1965)], что поле $\langle g \rangle$ с учетом квантовых поляризационных эффектов описывается уравнением, возникающим при вариации некоторой величины

$$W[\langle g \rangle] = \frac{1}{16\pi} \int L_{\text{eff}}(\langle g \rangle) d^4 v, \quad (9.1.14)$$

которая получила название *эффективного действия*. В отсутствие квантовых эффектов (при $\hbar = 0$) эффективное действие совпадает с действием Эйнштейна. В общем случае для изучения L_{eff} можно использовать

*) К аналогичной оценке можно также прийти, если учесть квантовый характер движения падающей частицы или попытаться оценить точность, с которой можно локализовать положение падающего тела вблизи горизонта событий с помощью рассеяния на нем волны физического поля. В последнем случае ограничение (9.1.12) возникает из-за того, что размер δr волнового пакета, энергия которого меньше массы черной дыры M , должен превосходить величину $\delta r \sim \hbar/Mc$.

разложение вида

$$L_{\text{eff}} = R + \hbar L^{(1)} + \dots \quad (9.1.15)$$

Можно ожидать (используя, например, соображения, основанные на анализе размерностей), что в низшем по $\hbar$ приближении квантовые поправки к L_{eff} имеют порядок $\hbar^2 r_1^2 / L^4$, где L — характерный радиус кривизны пространства-времени. Поскольку первый член разложения (9.1.15) имеет порядок $R \sim 1/L^2$, то отсюда следует, что квантовополяризационные эффекты могут существенно изменить уравнения Эйнштейна при значениях кривизны, сравнимых с $1/l_{\text{Pl}}^2$.

Для шварцшильдовской метрики это условие выполняется при значениях $r \sim r_1 = l_{\text{Pl}} (r_g / l_{\text{Pl}})^{1/3}$, лежащих внутри горизонта событий, если только масса черной дыры M превосходит планковскую. Поэтому при $M \gg m_{\text{Pl}}$ и $r < r_1$ квантовые эффекты существенно изменяют значение среднего поля $\langle g \rangle$ по сравнению с классическим решением, а вне и на границе черной дыры влияние этих эффектов мало.

Если в уравнениях для среднего поля $\langle g \rangle$ все члены, кроме эйнштейновского (отвечающего $\hbar = 0$), перенести в правую часть, то соответствующее выражение в правой части (отличное от нуля лишь при $\hbar \neq 0$) можно назвать вакуумным средним $\langle T^\nu_\mu \rangle$ тензора энергии-импульса тех физических полей, вклад которых учитывался в эффективном действии. На горизонте событий шварцшильдовской черной дыры характерные значения компонент $\langle T^\nu_\mu \rangle$ имеют порядок $\hbar c / r_g^4$. Заметим, что хотя при $M \gg m_{\text{Pl}}$ $\langle T^\nu_\mu \rangle$ мало изменяет внешнюю геометрию дыры, тем не менее это малое изменение при больших временах может приводить к существенным качественным изменениям глобальных свойств решений, описывающих дыру. В частности, поток отрицательной энергии через горизонт событий испаряющейся черной дыры, сопровождающий ее излучение Хокинга, приводит в конечном счете к уменьшению горизонта вплоть до планковских размеров (или, возможно, до его полного исчезновения). Нетрудно убедиться, что ожидаемое значение $\langle T^\nu_\mu \rangle$ для потока энергии через горизонт событий, сопровождающего эффект Хокинга, имеет порядок, совпадающий с приведенным выше значением $\hbar c / r_g^4$.

Приведенные соображения показывают, что при изучении квантовых эффектов в черных дырах, до тех пор пока масса черной дыры много больше планковской массы, а рассматриваемые интервалы времени много меньше характерного времени испарения черной дыры, можно пренебречь обратным влиянием рожденного вещества и поляризации вакуума и для описания геометрии черной дыры использовать решения классических уравнений Эйнштейна. В этом же приближении несущественны квантовые флуктуационные явления. Для получения самосогласованного описания эволюции внешней геометрии черной дыры можно использовать приближение, основанное на том, что квантовые поляризационные поправки вычисляются в известной заданной метрике.

В этой главе мы опишем основные результаты, касающиеся рождения частиц в заданном гравитационном поле стационарной черной дыры, оставляя обсуждение вопроса о поляризационных эффектах до следующей главы.

§ 9.2. Квантовое рождение частиц во внешнем поле.

Общая теория

Для доказательства тех результатов (относительно квантового рождения частиц в черных дырах), которые упоминались в предыдущем параграфе, и для получения более детальной информации о протекании этих квантовых явлений нам потребуется развитый до известной степени математический аппарат квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени.

С формальной точки зрения задача о рождении частиц в черных дырах является частным случаем более общей задачи о рождении частиц в произвольных внешних полях. Стандартная схема построения соответствующей теории сводится к следующему. Выбирают внешнее поле таким образом, чтобы в отдаленном прошлом и в отдаленном будущем оно отсутствовало. В этих, как говорят, ин- и аут-областях удается однозначно определить понятия частицы и вакуума. В частности, в качестве вакуума обычно выбирают низшее по энергии состояние системы. В результате действия внешнего поля в процессе эволюции системы в исходном вакуумном состоянии происходит рождение частиц, так что результат эволюции состояния, отвечающего ин-вакууму, уже не совпадает с аут-вакуумным состоянием. Полную информацию о процессах рождения частиц, их рассеянии и аннигиляции во внешнем поле содержит в себе оператор, связывающий ин- и аут-состояния и получивший название S -матрицы.

В задаче о рождении частиц в черных дырах имеются два существенных момента, приводящие к необходимости модификации стандартной схемы. Во-первых, хотя в физически реалистической постановке задачи, когда рассматривается процесс коллапса, приводящий к образованию черной дыры, можно считать гравитационное поле в прошлом (до начала коллапса) слабым и определить все состояния, относящиеся к ин-области, "выключить" естественным образом гравитационное поле образовавшейся черной дыры в будущем не представляется возможным. Уменьшение массы черной дыры приводит к увеличению, а не уменьшению поверхностной гравитации и, следовательно, интенсивности ее излучения. Поэтому, например, процесс "выключения" гравитационного поля черной дыры путем формального уменьшения ее массы не приводит к желаемому результату.

Во-вторых, и это более существенно, отдаленный наблюдатель может зарегистрировать состояния только тех частиц, которые вылетают наружу. Частицы, рождающиеся и попадающие внутрь черной дыры, остаются для него "невидимыми". При описании любых наблюдений вне черной дыры по состояниям этих частиц происходит усреднение. Иными словами, наблюдатель вне черной дыры всегда имеет дело только с частью полной квантовой системы, и, в соответствии с общими принципами квантовой механики, излучение черной дыры описывается *матрицей плотности*, даже если первоначально (до образования черной дыры) мы имели дело с чистым квантовомеханическим состоянием. Заметим, что необходимое усреднение приводится как раз по тем состояниям, которые отвечают "частицам", всегда остающимся в области сильного поля. Именно для них само понятие "частица" является плохо определенным из-за невозможности "выключения" поля черной дыры. К счастью, результат усреднения, описывающий состояние излучения черной дыры, не зависит от произвола в выборе того или иного способа описания этих "невидимых" состояний.

Подводя краткий итог сказанному, отметим, что интересующая нас задача вычисления характеристик квантового излучения черной дыры естественным образом разбивается на два этапа: вычисление оператора S -матрицы и усреднение его по части аут-состояний, отвечающих "невидимым" частицам. Общий формализм построения S -матрицы для задач во внешнем поле мы приведем в этом параграфе, а задача вычисления матрицы плотности, описывающей излучение черной дыры, будет рассмотрена в следующем.

Изложим (по необходимости кратко) схему построения квантовой теории свободных бозе-полей в заданном внешнем (не обязательно гравитационном) поле^{*)}.

Общее выражение для действия, описывающего систему действительных бозе-полей $\varphi_A(x)$ ($A = 1, \dots, M$), взаимодействующих с произвольным заданным внешним полем $g_Y(x)$ ($Y = 1, \dots, Q$), записывается следующим образом:

$$S[\varphi] = -\frac{1}{2} \int [\varphi_{A,\mu} P^{AB\mu\nu} \varphi_{B,\nu} + \varphi_A N^{AB\mu} \varphi_{B,\mu} + \varphi_A T^{AB} \varphi_B] d^4x, \quad (9.2.1)$$

где $P^{AB\mu\nu} = P^{(AB)}(\mu\nu)$, $N^{AB\mu} = N^{[AB]\mu}$, $T^{AB} = T^{(AB)}$ — действительные функции от внешнего поля g_Y и его производных. Напомним, что по повторяющимся индексам (в том числе по индексам A и B) производится суммирование. Варьирование этого действия по динамическим переменным φ_A приводит к следующим уравнениям поля:

$$D^{AB} \varphi_B \equiv \left[P^{AB\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - (N^{AB\mu} - P^{AB\mu\nu},{}_\nu) \partial_\mu - \left(T^{AB} + \frac{1}{2} N^{AB\mu},{}_\mu \right) \right] \varphi_B = 0. \quad (9.2.2)$$

Поскольку для произвольной пары функций φ_A^1 и φ_A^2 имеет место соотношение

$$\varphi_A^2 D^{AB} \varphi_B^1 - \varphi_A^1 D^{AB} \varphi_B^2 = [B^\mu(\varphi^1, \varphi^2)],{}_\mu, \quad (9.2.3a)$$

где

$$B^\mu(\varphi^1, \varphi^2) = \varphi_A^2 P^{AB\mu\nu} \varphi_{B,\nu}^1 - \varphi_A^1 P^{AB\mu\nu} \varphi_{B,\nu}^2 + \varphi_A^1 N^{AB\mu} \varphi_B^2, \quad (9.2.3b)$$

то, используя теорему Стокса (П. 32)**), можно убедиться, что выражение

$$B(\varphi^1, \varphi^2) = \int_\Sigma B^\mu(\varphi^1, \varphi^2) d\sigma_\mu, \quad (9.2.4)$$

вычисленное для произвольной пары решений φ^1, φ^2 уравнения (9.2.2),

) Более подробное изложение этой теории, а также теории ферми-полей в искривленном пространстве-времени см. Де Витт (1965, 1975), Биррел. Девис (1982), Фролов (1979, 1986).

**) Если пространство некомпактно, то предполагается, что решения φ^1 и φ^2 достаточно быстро убывают на бесконечности.

не зависит от выбора полной поверхности Коши Σ . Антисимметричную билинейную форму B , заданную на пространстве решений уравнения (9.2.2), будем называть *канонической формой*, отвечающей этому уравнению.

В квантовой теории поле $\hat{\varphi}_A(x)$ рассматривается как операторное решение уравнения (9.2.2). Канонические коммутационные соотношения, которым подчиняется этот оператор, формулируются стандартным образом. Пусть

$$\hat{\pi}^A(x) = \frac{\delta S}{\delta \varphi_{A,0}(x)} = -P^{AB0\nu} \varphi_{B,\nu} + \frac{1}{2} N^{AB0} \varphi_B$$

— импульс поля $\hat{\varphi}_A$; тогда

$$\begin{aligned} [\varphi_A(x, x^0), \hat{\varphi}_B(x', x^0)] &= 0, [\hat{\pi}^A(x, x^0), \hat{\pi}^B(x', x^0)] = 0, \\ [\hat{\varphi}_A(x, x^0), \hat{\pi}^B(x', x^0)] &= i\delta_A^B \delta^3(x, x'). \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Простой проверкой можно убедиться, что канонические коммутационные соотношения (9.2.5) полностью эквивалентны следующему соотношению*):

$$[B(\varphi^1, \hat{\varphi}), B(\varphi^2, \hat{\varphi})] = iB(\varphi^1, \varphi^2) \quad (9.2.6)$$

при условии, что оно выполнено для произвольной пары φ_A^1 и φ_A^2 классических решений системы (9.2.2).

Для введения понятия частицы оказывается удобным рассмотреть множество комплексных решений, удовлетворяющих тем же уравнениям (9.2.2) и тем же граничным условиям, что и поле φ_A , и выбрать в этом пространстве решений базис, т.е. полную систему линейно независимых решений. Удобно потребовать, чтобы этот базис состоял из комплексно-сопряженных друг другу решений $u_A^i(x)$, $\bar{u}_A^i(x)$, удовлетворяющих следующим условиям нормировки:

$$B(u^i, u^j) = B(\bar{u}^i, \bar{u}^j) = 0, B(u^i, \bar{u}^j) = i\delta^{ij}. \quad (9.2.7)$$

Здесь индексы $i, j, \dots$ нумеруют базисные решения. Каждое решение уравнений (9.2.2), удовлетворяющее наложенным граничным условиям, допускает разложение по этому базису. В частности, для оператора поля $\hat{\varphi}_A$ имеем

$$\hat{\varphi}_A(x) = \sum_i [\hat{a}_i u_A^i(x) + \hat{a}_i^* \bar{u}_A^i(x)], \quad (9.2.8)$$

где

$$\hat{a}_i = iB(\bar{u}^i, \hat{\varphi}), \hat{a}_i^* = -iB(u^i, \hat{\varphi}). \quad (9.2.9)$$

Если поле $\hat{\varphi}_A$ эрмитово ($\hat{\varphi}_A^* = \hat{\varphi}_A$), то $\hat{a}_i^* = (\hat{a}_i)^*$. Постоянные операторы $\hat{a}_i^*$ и $\hat{a}_i$, называемые *операторами рождения и уничтожения частиц* в состоянии с волновой функцией $u_A^i(x)$, удовлетворяют следующим коммута-

* Заметим, что коммутационные соотношения, записанные в форме (9.2.6), имеют большую область применимости, чем (9.2.5). В частности, они справедливы для теории со связями (т.е. когда $\det(P^{AB00}) = 0$), для которых правила (9.2.5) стандартного канонического квантования требуют изменения.

ционными соотношениям:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^*, \hat{a}_j^*] = 0, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^*] = \delta_{ij}. \quad (9.2.10)$$

В этом легко убедиться, если использовать соотношение (9.2.6) и условия нормировки (9.2.7).

Вакуумное состояние $|0\rangle$, отвечающее данному выбору базиса, определяется условием

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0. \quad (9.2.11)$$

Состояние $|i_1, \dots, i_n\rangle$, в котором имеется n частиц с волновыми функциями $u_{A1}^{i_1}(x), \dots, u_{An}^{i_n}(x)$, получается из вакуума в результате действия на него соответствующего числа операторов рождения:

$$|i_1, \dots, i_n\rangle = \hat{a}_{i_1}^* \dots \hat{a}_{i_n}^* |0\rangle. \quad (9.2.12)$$

Эти базисные многочастичные состояния являются собственными для оператора $\hat{n}_i = \hat{a}_i^* \hat{a}_i$ числа частиц в моде i :

$$\hat{n}_i |i_1, \dots, i_n\rangle = n_i |i_1, \dots, i_n\rangle, \quad n_i = \sum_{k=1}^n \delta_{iik} \quad (9.2.13)$$

и удовлетворяют следующим условиям ортонормируемости и полноты:

$$\langle i_1, \dots, i_n | j_1, \dots, j_m \rangle = 0, \text{ если } n \neq m,$$

$$\langle i_1, \dots, i_n | j_1, \dots, j_n \rangle = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам} \\ (i_1, \dots, i_n)}} \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_n j_n}, \quad (9.2.14)$$

$$\hat{I} = |0\rangle\langle 0| + \sum_{n=1}^{\infty} |i_1, \dots, i_n\rangle \frac{1}{n!} \langle i_1, \dots, i_n|. \quad (9.2.15)$$

В последнем равенстве $\hat{I}$ — единичный оператор, а суммирование ведется по всем $(i_1, \dots, i_n)$.

Очевидно, что выбор базиса $(u_A^i, \bar{u}_A^i)$ и связанного с ним определения "частицы" далеко не однозначен. Приведенная выше формальная конструкция приобретает физический смысл только в том случае, когда удастся четко описать набор признаков, по которым мы отличаем вакуумное или одночастичное состояние от всех остальных возможных квантовых состояний системы. В конечном счете этот вопрос сводится к описанию детектора, с помощью которого мы регистрируем частицы. Согласно квантовой теории измерений этот прибор описывается эрмитовым оператором, собственными векторами которого являются состояния, отвечающие определенному числу регистрируемых этим прибором частиц.

В стандартной схеме теории, когда внешнее поле "выключается" в отдаленном прошлом и в отдаленном будущем, можно определить все необходимые понятия в этих асимптотических ин- и аут-областях. В каждой из них приходится иметь дело со свободной теорией бозе-полей в плоском пространстве-времени, для которой однозначно определены сохраняющиеся операторы энергии $\hat{P}_0$ и импульса $\hat{P}_i$, отвечающие трансляциям по временной (x^0) и пространственным (x^i) координатам в

пространстве Минковского:

$$[\hat{P}_a, \varphi] = \frac{1}{i} \xi_a^\mu \partial_\mu \varphi. \quad (9.2.16)$$

Здесь $\xi_a^\mu = \delta_a^\mu$ — векторные поля Киллинга, порождающие соответствующие трансляции. Вакуумное состояние в каждой из асимптотических областей определяется как низшее собственное состояние оператора энергии $\hat{P}_0$. Этот выбор однозначно соответствует тому, что в качестве базисных выбираются функции, обладающие свойством положительной частотности по отношению к временной координате x^0 :

$$\xi_0^\mu \partial_\mu u_A^i(x) = -i\omega_i u_A^i. \quad (9.2.17)$$

Чтобы отличить два базиса, состоящие из решений $(u_A^i, \bar{u}_A^i)$, для которых соотношения (9.2.17) играют роль асимптотических граничных условий в будущем (аут-базис) или в прошлом (ин-базис), мы будем снабжать базисные функции индексом out и in соответственно. Аналогичным образом мы будем использовать эти дополнительные индексы для того, чтобы различать величины, определяемые с помощью этих базисов. Так, например,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_A &= \sum_i (\hat{a}_{in,i} u_{in,A}^i + \hat{a}_{in,i}^* \bar{u}_{in,A}^i) = \\ &= \sum_i (\hat{a}_{out,i} u_{out,A}^i + \hat{a}_{out,i}^* \bar{u}_{out,A}^i), \end{aligned} \quad (9.2.18)$$

$$\hat{a}_{in,i} |0; in\rangle = 0, \hat{a}_{out,i} |0; out\rangle = 0. \quad (9.2.19)$$

Поскольку ин- и аут-базисные функции удовлетворяют различным граничным условиям, то ин- и аут-базисы, вообще говоря, не совпадают. Коэффициенты матриц A^{ij} и B^{ij} , связывающих ин- и аут-базисы

$$u_{out,A}^i = \sum_j (A^{ij} u_{in,A}^j + B^{ij} \bar{u}_{in,A}^j), \quad (9.2.20)$$

носят название *коэффициентов преобразования Боголюбова*. Используя условия нормировки (9.2.7), имеем

$$A^{ij} = iB(\bar{u}_{in}^j, u_{out}^i), B^{ij} = -iB(u_{in}^j, \bar{u}_{out}^i). \quad (9.2.21)$$

Для сокращения записи удобно ввести следующие матричные обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{out} &= (\hat{a}_{out,i}, \hat{a}_{out,i}^*), \\ v_{in} &= \begin{pmatrix} u_{out}^i \\ \bar{u}_{out}^i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} A^{ij} & B^{ij} \\ \bar{B}^{ij} & \bar{A}^{ij} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.2.22)$$

Используя эти обозначения, имеем

$$\begin{aligned} v_{out} &= C v_{in}, b_{in} = b_{out} C, \hat{\varphi} = \hat{b}_{in} v_{in} = \hat{b}_{out} v_{out}, \\ b_{out} &= b_{in} C^{-1}, v_{in} = C^{-1} v_{out}. \end{aligned} \quad (9.2.23)$$

Для коэффициентов матрицы C^{-1} , обратной по отношению к C , соот-

ношения (9.2.21) позволяют получить следующее выражение:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} A^+ & -B' \\ -B^+ & A' \end{pmatrix}. \quad (9.2.24)$$

В приведенных формулах штрих сверху означает транспонирование, а + — эрмитово сопряжение матриц: $(\)^+ = (\overline{\ })'$. Условия $CC^{-1} = C^{-1}C = I$ означают выполнение равенств

$$\begin{aligned} AA^+ - BB^+ &= I, & A^+A - B'\bar{B} &= I, \\ (A^{-1}B)' &= A^{-1}B, & (\bar{B}A^{-1})' &= \bar{B}A^{-1}. \end{aligned} \quad (9.2.25)$$

(здесь I — единичная матрица).

Оператор S -матрицы, связывающий ин- и аут-состояния, определяется соотношениями

$$\hat{b}_{in}\hat{S} = \hat{S}\hat{b}_{out}. \quad (9.2.26)$$

Можно убедиться, что этот оператор является унитарным ($\hat{S}\hat{S}^+ = \hat{I}$), обладает свойством

$$\hat{S} |i_1, \dots, i_n; out\rangle = |i_1, \dots, i_n; in\rangle \quad (9.2.27)$$

и допускает следующее представление:

$$\hat{S} = \sum_n |i_1, \dots, i_n; in\rangle \frac{1}{n!} \langle i_1, \dots, i_n; out|. \quad (9.2.28)$$

Если подставить $\hat{b}_{in} = \hat{b}_{out}C$ в (9.2.26), то, решая получившееся уравнение, можно выразить оператор $\hat{S}$ через $\hat{b}_{out}$. Соответствующее решение допускает следующее представление [Березин (1965*), Де Витт (1965)]:

$$\hat{S} = e^{iW_0} : \exp \left(\frac{1}{2} a'_{out} \Lambda \hat{a}_{out} + \hat{a}_{out}^* (M - I) \hat{a}_{out} + \frac{1}{2} \hat{a}_{out}^* V \hat{a}_{out}^* \right) :, \quad (9.2.29)$$

где :: означает операцию нормального упорядочения*) относительно аут-операторов, $\hat{a}_{out}^* = (\hat{a}_{out}^*)'$ и

$$\begin{aligned} \Lambda &= A^{-1}B, & V &= -\bar{B}A^{-1}, & M &= A^{-1}, \\ e^{iW_0} &= \theta [\det(A^+A)]^{-1/4}, & |\theta| &= 1 \end{aligned} \quad (9.2.30)$$

(здесь $\hat{a}'_{out} \Lambda \hat{a}_{out} \equiv \sum_{i,j} \hat{a}_{out,i} \Lambda^{ij} \hat{a}_{out,j}$ и т.д.).

Из (9.2.25) вытекает симметричность матриц Λ и V :

$$\Lambda' = \Lambda, \quad V' = V. \quad (9.2.31)$$

Этот результат, состоящий в том, что имеется возможность явно вычислить оператор S -матрицы, содержащий полную информацию о квантовых эффектах рождения, рассеяния и поглощения частиц во внешнем поле,

) Эта операция состоит в том, что в разложении соответствующего выражения в ряд по операторам рождения и уничтожения все операторы рождения располагаются слева от операторов уничтожения. То же выражение (9.2.29) описывает S -матрицу и в случае ферми-полей. При этом матрицы Λ и V антисимметричны. Общее выражение для них через коэффициенты Боголюбова дано в книгах Березина (1965), Де Витта (1965).

если известны коэффициенты преобразования Боголюбова, определяемые путем решения классических уравнений (9.2.2), является основным для рассматриваемой теории во внешнем поле. Можно убедиться, что матрицы V , M и Λ , входящие в (9.2.29), непосредственно связаны с амплитудами вероятности элементарных процессов рождения, рассеяния и уничтожения во внешнем поле:

$$\begin{aligned}\langle i, j; \text{out} | 0; \text{in} \rangle &= e^{iW_0} V^{ij}, \\ \langle i; \text{out} | j; \text{in} \rangle &= e^{iW_0} M^{ij}, \\ \langle 0; \text{out} | i, j; \text{in} \rangle &= e^{iW_0} \Lambda^{ij}.\end{aligned}\quad (9.2.32)$$

§ 9.3. Усреднение по "ненаблюдаемым" состояниям.

Матрица плотности

Обсудим теперь более подробно те особенности, которые отличают задачу о рождении частиц в черных дырах от общей задачи во внешнем поле, рассмотренной в предыдущем разделе. Как уже упоминалось, характерным для процессов с участием черных дыр является возможность разделить множество аут-состояний на два класса, представителей которых мы условно будем называть "видимыми" и "невидимыми". К первому классу относятся состояния, отвечающие частицам, вылетающим от черной дыры, ко второму — падающим внутрь нее*). Чтобы сделать это разбиение явным, договоримся использовать вместо индекса i , нумерующего аут-состояния, индекс α для нумерации "видимых" и индекс a для нумерации "невидимых" состояний. Примем также обозначения

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_\alpha &\equiv \hat{a}_{\text{out}, \alpha}, \quad \hat{b}_a \equiv \hat{a}_{\text{out}, a}, \\ |\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta\rangle |a_1, \dots, a_m; b\rangle &\equiv \\ &\equiv \hat{\beta}_{\alpha_1}^* \dots \hat{\beta}_{\alpha_k}^* \hat{b}_{a_1}^* \dots \hat{b}_{a_m}^* |0; \text{out}\rangle.\end{aligned}\quad (9.3.1)$$

Произвольный вектор пространства аут-состояний $|\Psi\rangle$ допускает следующее разложение:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k, m} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_k \\ a_1, \dots, a_m}} \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; a_1, \dots, a_m} |\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta\rangle |a_1, \dots, a_m; b\rangle. \quad (9.3.2)$$

Для среднего значения $\langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle$ произвольного оператора $\hat{F}$, зависящего только от "видимых" состояний $\hat{F} = F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha)$, имеем

$$\begin{aligned}\langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle &= \sum_{k, m} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_k \\ \alpha'_1, \dots, \alpha'_k \\ a_1, \dots, a_m \\ a'_1, \dots, a'_m}} \bar{\Psi}_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k; a'_1, \dots, a'_m} \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; a_1, \dots, a_m} \times \\ &\times \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_k; \beta | \langle a'_1, \dots, a'_m; b | F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha) | a_1, \dots, a_m; b \rangle | \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta \rangle.\end{aligned}\quad (9.3.3)$$

Поскольку оператор $\hat{F}$ не зависит от $\hat{b}_a$ и $\hat{b}_a^*$, а состояния $|a_1, \dots, a_m; b\rangle$

*) При наличии связанных состояний условимся относить их ко второму классу.

удовлетворяют условиям нормировки

$$\langle a'_1, \dots, a'_{m'}; b | a_1, \dots, a_m; b \rangle = \delta_{mm'} \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам} \\ (a_1, \dots, a_m)}} \delta_{a'_1 a_1} \dots \delta_{a'_{m'} a_m}, \quad (9.3.4)$$

то соотношение (9.3.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi | F | \Psi \rangle &= \sum_{k, k'} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} R_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'}} \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'}; \beta | \hat{F} | \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta \rangle = \\ &= \text{Sp}_{\beta}(\hat{\rho} \hat{F}), \end{aligned} \quad (9.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} R_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'}} &= \\ &= \sum_m m! \sum_{a_1, \dots, a_m} \bar{\Psi}_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'}; a_1, \dots, a_m} \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; a_1, \dots, a_m}, \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

$$\hat{\rho} = \sum_{k, k'} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} |\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta\rangle R_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'}} \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'}; \beta| \quad (9.3.7)$$

и Sp_{β} означает операцию вычисления следа в пространстве состояний "видимых" частиц.

Следует особо подчеркнуть, что введенная выше матрица плотности $\hat{\rho}$ не зависит от способа определения понятия частицы для "невидимых" состояний. На примере преобразований, связывающих ин- и аут-базисы, мы уже отмечали, что отвечающий этому преобразованию оператор $\hat{S}$ является унитарным: $\hat{S}^* = \hat{S}^{-1}$. Очевидно, что это свойство имеет место для подобных канонических преобразований общего вида. Изменение базиса в подпространстве решений, отвечающих "невидимым" частицам, описывается с помощью унитарного оператора $\hat{U}$, обладающего свойством

$$\begin{aligned} \hat{U} | \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta \rangle | a_1, \dots, a_m; b \rangle &\equiv \\ &\equiv \sum_{m'} U_{a_1, \dots, a_m; a'_1, \dots, a'_{m'}} | \alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta \rangle | a'_1, \dots, a'_{m'}; b \rangle. \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m'} U_{a_1, \dots, a_m; a'_1, \dots, a'_{m'}} \bar{U}_{a''_1, \dots, a''_{m''}; a'_1, \dots, a'_{m'}} = \\ &= \delta_{mm''} \delta_{a_1 a''_1} \dots \delta_{a_m a''_m}, \end{aligned} \quad (9.3.9)$$

При этом преобразовании коэффициенты $\Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; a_1, \dots, a_m}$ разложения (9.3.2) преобразуются по следующему закону:

$$\begin{aligned} & \Psi'_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; a'_1, \dots, a'_m} = \\ & = \sum_{a_1, \dots, a_m} \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; a_1, \dots, a_m} U_{a_1, \dots, a_m; a'_1, \dots, a'_m}, \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

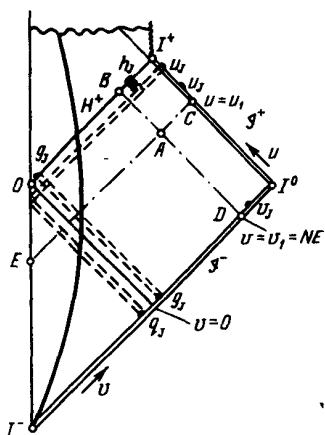
а коэффициенты матрицы $R_{\alpha_1, \dots, \alpha_k; \alpha'_1, \dots, \alpha'_k}$, вследствие условия унитарности (9.3.9), остаются неизменными.

Нетрудно убедиться, используя соотношение (9.3.5) для единичного оператора $\hat{F} = \hat{I}$, что для нормированного состояния $|\Psi\rangle$ ($\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$) матрица плотности $\hat{\rho}$ удовлетворяет условию нормировки $\text{Sp}(\hat{\rho}) = 1$.

§ 9.4. Матрица плотности и производящий функционал для квантовых эффектов в черных дырах

Теперь после изложения общей формальной схемы мы обратимся непосредственно к вопросу о ее применении для описания квантовых эффектов в черных дырах. Для простоты мы ограничимся рассмотрением теории безмассового нейтрального скалярного поля φ в пространстве-времени вращающейся черной дыры. Случай безмассовых полей является наиболее важным, поскольку, с одной стороны, именно безмассовые поля дают основной вклад в квантовое излучение черных дыр, а с другой стороны, это рассмотрение дает хорошее приближение при описании рождения массивных частиц в случае, когда хокинговская температура черной дыры много больше энергии покоя этих частиц, и для их описания можно пользоваться ультрарелятивистским приближением. К обсуждению влияния спина, массы и заряда частиц на процессы их рождения в черных дырах мы вернемся позднее.

На рис. 75 изображена диаграмма Пенроуза для пространства-времени



вращающейся черной дыры, возникающей в результате коллапса массивного тела. Будем считать, что координата опережающего конформного времени Бонди u выбрана таким образом, что световой луч, посланный с $\mathcal{I}^-$ в момент $u = 0$, достигает точки $r = 0$ точно в момент возникновения горизонта (см. рис. 75). Поскольку после образования черной дыры она довольно быстро становится практически стационарной, мы будем считать, что волновые пакеты, испущенные с $\mathcal{I}^-$, начиная с не-

Рис. 75. Диаграмма Пенроуза пространства-времени вращающейся черной дыры, возникающей в результате коллапса массивного тела

которого момента опережающего времени $v = v_1$, движутся все время в метрике, совпадающей с метрикой Керра. Для построения базисных волновых функций мы используем разложение решений волнового уравнения

$$\square \varphi = 0 \quad (9.4.1)$$

в метрике Керра по сфероидальным волновым функциям

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} S_l^m(\cos \theta), \quad (9.4.2)$$

где S_l^m определены как ограниченные на интервале $[-1, 1]$ собственные функции оператора

$$\left\{ \frac{d}{dz} \left[(1-z^2) \frac{d}{dz} \right] - \omega^2 a^2 (1-z^2) - \frac{m^2}{1-z^2} \right\} S_l^m(z) = -\lambda_l^m S_l^m(z), \quad (9.4.3)$$

удовлетворяющие условиям нормировки

$$\int_{-1}^1 S_l^m(z) S_{l'}^m(z) dz = \delta_{ll'}. \quad (9.4.4)$$

Обозначим через $v_{\omega lm}$ решение уравнения (9.4.1), обладающее тем свойством, что его образ $V_{\omega lm}$ на $\mathcal{J}^-$ ($V_{\omega lm}(v, \theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} [r v_{\omega lm}(r, v, \theta, \varphi)]$) имеет вид

$$V_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (9.4.5)$$

где v — координата опережающего конформного времени Бонди (см. § 5.1). Для дальнейшего оказывается удобным рассматривать в качестве базисных не сами функции $v_{\omega lm}$, а построенные из них решения типа волновых пакетов. С этой целью зафиксируем действительное число E ($0 < E \ll 1$) и обозначим ($j \geq 0$)

$$v_{jnlm} = E^{-1/2} \int_{jE}^{(j+1)E} e^{2\pi i n \omega / E} v_{\omega lm} d\omega. \quad (9.4.6)$$

Условимся далее коллективный индекс $jnlm$ обозначать кратко через α . Волновые пакеты v_α на $\mathcal{J}^-$ содержат частоты в интервале от jE до $(j+1)E$, имеют максимум вблизи значения опережающего времени $v = 2\pi n/E$ и обладают шириной $\Delta v \sim 2\pi/E$.

Заметим, что для рассматриваемой теории безмассового поля поверхность $\mathcal{J}^-$ в пространстве Пенроуза играет роль полной поверхности Коши и каноническая форма $\tilde{B}$ для пары φ^1, φ^2 решений уравнения (9.4.1):

$$B(\varphi^1, \varphi^2) = \int_{\Sigma} (\varphi^2 \varphi_{,\nu}^1 - \varphi^1 \varphi_{,\nu}^2) g^{\nu\mu} d\sigma_\mu \quad (9.4.7)$$

допускает следующую запись:

$$B(\varphi^1, \varphi^2) = \int_{\mathcal{J}^-} (\Phi^1 \partial_v \Phi^2 - \Phi^2 \partial_v \Phi^1) dv d\omega, \quad (9.4.8)$$

где Φ^1 и Φ^2 — образы полей φ^1 и φ^2 на $\mathcal{J}^-$.

Нетрудно убедиться, используя (9.4.2), (9.4.4) — (9.4.6) и (9.4.8), что волновые пакеты v_α удовлетворяют условиям нормировки

$$B(v_\alpha, v_{\alpha'}) = B(\bar{v}_\alpha, \bar{v}_{\alpha'}) = 0, \quad B(v_\alpha, \bar{v}_{\alpha'}) = i\delta_{\alpha\alpha'} \quad (9.4.9)$$

и совместно с $\bar{v}_\alpha$ образуют полную систему на $\mathcal{I}^-$. Здесь и далее мы используем обозначение

$$\delta_{\alpha\alpha'} \equiv \delta_{jj'} \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (9.4.10)$$

Указанный набор функций ($v_\alpha, \bar{v}_\alpha$) можно выбрать в качестве ин-базиса. Отвечающее этому выбору ин-вакуумное состояние $|0; \text{in}\rangle$ выделяется условием отсутствия потока энергии, падающего с $\mathcal{I}^-$ на черную дыру.

Заменяя в выражении (9.4.5) опережающее конформное время Бонди v на запаздывающее u , получим функции на $\mathcal{I}^*$, которые обозначим $U_{\omega lm}$. Их этих функций с помощью преобразования, аналогичного (9.4.6), построим на $\mathcal{I}^*$ волновые пакеты u_α . Образование горизонта событий H^+ приводит к тому, что задание образа функции на $\mathcal{I}^*$ еще не определяет решение волнового уравнения (9.4.1). Дополнительные условия, необходимые для однозначного определения решения, могут быть заданы в виде значений решения на горизонте H^+ . Определим волновой пакет u_α как решение (9.4.1), обращающееся в нуль на горизонте событий и обладающее образом U_α на $\mathcal{I}^*$. Очевидно, что эти пакеты удовлетворяют условиям нормировки, аналогичным (9.4.9). Если дополнить решения ($u_\alpha, \bar{u}_\alpha$) до полной системы с помощью произвольных функций ($h_\alpha, \bar{h}_\alpha$), образы которых обращаются в нуль на $\mathcal{I}^*$ и образуют полную нормированную систему функций на H^+ , то систему ($u_\alpha, \bar{u}_\alpha, h_\alpha, \bar{h}_\alpha$) можно выбрать как аут-базис. В качестве h_α удобно выбрать решения, которые определяются следующим образом. Пусть $\tilde{h}_{\omega lm}$ — решения, обращающиеся в нуль на $\mathcal{I}^*$ и принимающие на H^+ значения в координатах (4.4.1)

$$\tilde{h}_{\omega lm} |_{H^+} = \frac{1}{\sqrt{4\pi |\omega - m\Omega^H| (r_+^2 + a^2)}} e^{-i\omega\tilde{v}} Y_{lm}(\theta, \tilde{\varphi}), \quad (9.4.11)$$

и пусть $\tilde{h}_\alpha$ — волновые пакеты (9.4.6), построенные для этих решений. Определим h_α с помощью соотношения

$$h_\alpha = \theta(\sigma_\alpha) \tilde{h}_\alpha + \theta(-\sigma_\alpha) \bar{\tilde{h}}_\alpha, \quad \sigma_\alpha = \text{sign}(\omega_f - m\Omega^H). \quad (9.4.12)$$

Можно убедиться, что функции h_α удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$B(h_\alpha, h_{\alpha'}) = B(\bar{h}_\alpha, \bar{h}_{\alpha'}) = 0, \quad B(h_\alpha, \bar{h}_{\alpha'}) = i\delta_{\alpha\alpha'}. \quad (9.4.13)$$

В пространстве-времени вечной черной дыры, описываемом метрикой Керра, волновое уравнение (9.4.1) допускает полное разделение переменных, и поэтому в этом пространстве имеется следующая связь между введенными волновыми функциями:

$$v_{\omega lm} = R_{\omega lm} u_{\omega lm} + T_{\omega lm} h_{\omega lm}. \quad (9.4.14)$$

Коэффициенты $R_{\omega l m}$ и $T_{\omega l m}$ будем называть коэффициентами отражения и поглощения волны $v_{\omega l m}$ черной дырой. Для классической волны величина $|R_{\omega l m}|^2$ равна отношению энергии рассеянной волны к энергии падающей. Это отношение становится больше единицы для тех волн, для которых выполнено условие суперрадиации. Если выбрать параметр E при построении пакетов достаточно малым, а $R_{\omega l m}$ и $T_{\omega l m}$ гладко зависят от частоты ω , то аналогичное разложение можно записать и для волновых пакетов:

$$v_\alpha = R_\alpha u_\alpha + T_\alpha \tilde{h}_\alpha. \quad (9.4.15)$$

Заметим теперь, что волновые ($v_\alpha \equiv v_{jnlm}$) пакеты с достаточно большим значением $n (\geq N \equiv v_1/E)$ в пространстве-времени черной дыры, возникающей в результате коллапса, движутся в метрике, практически не отличающейся от метрики Керра (см. рис. 75). Поэтому для них также выполняется соотношение (9.4.15). Из условий нормировки функций v_α , u_α и h_α вытекает следующее соотношение:

$$|R_\alpha|^2 + \sigma_\alpha |T_\alpha|^2 = 1. \quad (9.4.16)$$

Из него следует, в частности, что $|R_\alpha|^2 > 1$ для тех мод, для которых выполнено условие суперрадиации $\sigma_\alpha < 0$.

Следующий этап состоит в нахождении коэффициентов преобразования Боголюбова, связывающих построенные ин- и аут-базисы. Эта задача существенно упрощается, если воспользоваться следующим приемом, введенным Уолдом (1975). Далее, не оговаривая этого особо, мы будем рассматривать волновые пакеты, индекс α для которых удовлетворяет условию $n \geq N$, так что для пакетов с этими индексами выполнено соотношение (9.4.15). Определим волновые пакеты $\tilde{q}_\alpha$, потребовав, чтобы они были ортогональны v_α :

$$B(\tilde{q}_\alpha, v_{\alpha'}) = B(\tilde{q}_\alpha, \bar{v}_{\alpha'}) = 0 \quad (9.4.17)$$

и допускали разложение

$$\tilde{q}_\alpha = t_\alpha u_\alpha + r_\alpha \tilde{h}_\alpha. \quad (9.4.18)$$

Через q_α обозначим волновой пакет, связанный с $\tilde{q}_\alpha$ соотношением

$$q_\alpha = \theta(\sigma_\alpha) \tilde{q}_\alpha + \theta(-\sigma_\alpha) \bar{\tilde{q}}_\alpha \quad (9.4.19)$$

и нормированный условием

$$B(q_\alpha, \bar{q}_{\alpha'}) = i \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (9.4.20)$$

Условия ортогональности и нормировки приводят к выполнению наряду с (9.4.16) также следующих соотношений:

$$|r_\alpha|^2 + \sigma_\alpha |t_\alpha|^2 = 1, \quad t_\alpha \bar{R}_\alpha + \sigma_\alpha r_\alpha \bar{T}_\alpha = 0. \quad (9.4.21)$$

Из свойств симметрии метрики Керра по отношению к преобразованию $t \rightarrow -t$, $\varphi \rightarrow -\varphi$ следует равенство [см., например, Унру (1974)]

$$T_\alpha = \sigma_\alpha t_\alpha. \quad (9.4.22)$$

Используя соотношения (9.4.15), (9.4.16), (9.4.18), (9.4.21) и (9.4.22), можно получить

$$u_\alpha = \bar{T}_\alpha \tilde{q}_\alpha + \bar{R}_\alpha v_\alpha. \quad (9.4.23)$$

Это соотношение показывает, что если проследить за эволюцией в прошлое пакета u_α , то часть его ($\bar{R}_\alpha v_\alpha$), рассеиваясь на стационарном поле черной дыры, выходит на $\mathcal{I}^-$ при $v > 0$, а другая ($\bar{T}_\alpha \tilde{q}_\alpha$) проходит через коллапсирующее тело в момент времени, предшествующий возникновению горизонта событий, и выходит на $\mathcal{I}^-$ при $v < 0$. Хокинг (1975) показал, что для описания распространения этой второй части можно использовать приближение геометрической оптики и что в этом приближении волновой пакет $\tilde{Q}_\alpha$ на $\mathcal{I}^-$ получается с помощью преобразования (9.4.6) из функции

$$\tilde{Q}_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tilde{\omega}}} e^{i\tilde{\omega} \ln(-v)/\kappa} Y_{lm}(\theta, \varphi) \theta(-v). \quad (9.4.24)$$

Здесь $\tilde{\omega} = \omega - m\Omega^H$, а $\theta(x)$ — ступенчатая функция, отличная от нуля и равная 1 при $x > 0$.

Для получения этого результата достаточно рассмотреть поведение поверхности постоянной фазы для волны $u_{\omega lm}$. В приближении геометрической оптики эта поверхность — световая. Вне коллапсирующего тела, в области, где геометрия пространства-времени хорошо аппроксимируется метрикой Керра, эта поверхность описывается уравнением $\tilde{U} = \text{const}$, где $\tilde{U}$ — запаздывающая координата Керра, а ее образующие — световые геодезические $\tilde{U} = \text{const}$, $\tilde{\varphi}_+ = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ (см. § 4.4). При продолжении в прошлое эти геодезические проходят через коллапсирующее вещество и выходят на $\mathcal{I}^-$ в точке с координатами v, φ, θ_1 ($v < 0$). Можно убедиться [Хокинг (1975)], что при $\tilde{U} \rightarrow \infty$ имеют место следующие соотношения:

$$\tilde{U} = -\kappa^{-1} \ln(-v), \quad \tilde{\varphi}_+ = -\Omega^H \kappa^{-1} \ln(-v) + \varphi,$$

связывающие $\tilde{U}, \tilde{\varphi}_+$ с v, φ . Если учесть, что на $\mathcal{I}^+$ координаты $\tilde{U}, \tilde{\varphi}_+$ совпадают с u, φ , то приходим к выражению (9.4.24) для $\tilde{Q}_{\omega lm}$. Указанное приближение выполняется тем лучше, чем в более поздние моменты времени u выходит на $\mathcal{I}^+$ пакет u_α . Мы будем считать, что число N выбрано достаточно большим и описанное приближение выполняется с необходимой степенью точности.

Введем еще одно семейство решений g_α , определив их с помощью задания образов G_α на $\mathcal{I}^-$:

$$G_\alpha(v, \theta, \varphi) = \bar{Q}_\alpha(-v, \theta, \varphi). \quad (9.4.25)$$

Покажем, что линейные комбинации p_α и n_α функций g_α и q_α :

$$p_\alpha = c_\alpha g_\alpha + s_\alpha \bar{q}_\alpha,$$

$$n_\alpha = c_\alpha q_\alpha + s_\alpha \bar{g}_\alpha, \quad (9.4.26)$$

где

$$s_{\alpha} = (w^{-2\sigma_{\alpha}} - 1)^{-1/2}, \quad c_{\alpha} = (1 - w_{\alpha}^{2\sigma_{\alpha}})^{-1/2}, \quad (9.4.27)$$

$$w_{\alpha} = e^{-\pi(\omega_j - m\Omega^H)/\kappa},$$

обладают положительно-частотными по отношению к опережающему времени v образами на $\mathcal{Y}^-$.

Для доказательства достаточно заметить, что функции p_{α} и n_{α} получаются с помощью преобразования (9.4.6) из решений, которые на $\mathcal{Y}^-$ содержат следующую зависимость от v ($-\infty < \tilde{\omega} < \infty$):

$$F_{\omega lm}(v) = \theta(v)e^{-l\tilde{\omega} \ln v/\kappa} + \theta(-v)e^{-\pi \tilde{\omega}/\kappa} e^{-i\tilde{\omega} \ln(-v)/\kappa}. \quad (9.4.28)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 e^{-ipv} e^{-l\tilde{\omega} \ln(-v)/\kappa} dv = \\ & = -e^{\pi \tilde{\omega}/\kappa} \int_0^{\infty} e^{-ipv} e^{-i\tilde{\omega} \ln v/\kappa} dv \quad \text{при } p > 0. \end{aligned} \quad (9.4.29)$$

В этом нетрудно убедиться, осуществив деформацию контура интегрирования в правой части (9.4.29) в нижней полуплоскости. Поэтому при $p > 0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipv} F_{\omega lm}(v) dv = 0, \quad (9.4.30)$$

откуда и вытекает условие положительной частотности функций p_{α} и n_{α} .

Выберем в качестве ин-базисных положительно-частотных решений наборы функций

$$W_{\alpha}^{\text{in}} = \begin{pmatrix} v_{\alpha} \\ p_{\alpha} \\ n_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = jnlm, \quad (9.4.31)$$

при n , больших выбранного выше значения N , дополнив их произвольным образом положительно-частотными на $\mathcal{Y}^-$ функциями до полного ортонормированного базиса. Аналогичным образом аут-базис образуем путем дополнения наборов функций

$$W_{\alpha}^{\text{out}} = \begin{pmatrix} u_{\alpha} \\ h_{\alpha} \\ g_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad n > N, \quad (9.4.32)$$

до полной ортонормированной системы. Удобство описанного выбора

базисов, предложенного Уолдом (1975), состоит в том, что при этом выборе происходит факторизация матриц преобразования Боголюбова, и мы имеем

$$W_{\alpha}^{\text{in}} = A_{\alpha}^{+} W_{\alpha}^{\text{out}} - B_{\alpha}' \bar{W}_{\alpha}^{\text{out}}. \quad (9.4.33)$$

Матрицы преобразований A_{α} и B_{α} , связывающие наборы ин-базисных (W_{α}^{in}) и аут-базисных (W_{α}^{out}) функций, легко определяются с помощью соотношений (9.4.15), (9.4.18) и (9.4.26) и имеют вид

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{R}_{\alpha} & s_{\alpha} \bar{t}_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & c_{\alpha} r_{\alpha} \\ 0 & c_{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_{\alpha} \bar{t}_{\alpha} \\ -T_{\alpha} & -s_{\alpha} r_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & s_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\alpha} < 0, \quad (9.4.34)$$

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{R}_{\alpha} & 0 & c_{\alpha} \bar{t}_{\alpha} \\ \bar{T}_{\alpha} & 0 & c_{\alpha} \bar{r}_{\alpha} \\ 0 & c_{\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -s_{\alpha} \bar{t}_{\alpha} & 0 \\ 0 & -s_{\alpha} \bar{r}_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -s_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\alpha} > 0.$$

Таким образом, с помощью описанного способа перехода к базисам Уолда нам удалось получить явное выражение для тех коэффициентов преобразований Боголюбова, которые определяют связь ин- и аут-базисных функций при больших значениях $n \geq N$. Используя общие формулы (9.2.29) и (9.2.30), можно получить выражение для оператора S -матрицы.

Следующим этапом является вычисление матрицы плотности, описывающей излучение черной дыры. Обозначим через

$$\hat{\beta}_{\alpha} = iB(\bar{u}_{\alpha}, \hat{\varphi}),$$

$$\hat{\beta}_{\alpha}^{*} = -iB(u_{\alpha}, \hat{\varphi})$$

операторы уничтожения и рождения частиц в состоянии u_{α} . Пусть нас интересует вычисление средних вида $\langle 0; \text{in} | F(\hat{\beta}_{\alpha}^{*}, \hat{\beta}_{\alpha}) | 0; \text{in} \rangle$. Используя выражения (9.2.29), (9.2.30) для оператора S -матрицы и представляя $| 0; \text{in} \rangle$ в виде $| 0; \text{in} \rangle = \hat{S} | 0; \text{out} \rangle$, можно определить коэффициенты разложения (9.3.2) и вычислить искомую матрицу плотности.

В общем случае матрица плотности $\hat{\rho}$, описывающая наблюдаемые на $\mathcal{Y}^{+}$ и возникающая при усреднении по состояниям h_{α} , зависит от деталей процесса образования черной дыры. Однако, если интересоваться значениями наблюдаемых на $\mathcal{Y}^{+}$ лишь в достаточно поздние моменты запаздывающего времени ($u > u_1$), то эти детали оказываются несущественными и значения этих наблюдаемых зависят только от параметров образовавшейся стационарной черной дыры. В этом можно убедиться, если рассмотреть матрицу плотности $\hat{\rho}_N$, получаемую из $\hat{\rho}$ дополнительным усреднением по всем состояниям на $\mathcal{Y}^{+}$, кроме u_{α} с $n \geq N$. Для получения явного выражения $\hat{\rho}_N$ оказывается достаточным знания вычисленных выше коэффициентов преобразований Боголюбова A_{α} и B_{α} при $n \geq N$. Опуская детали вычисле-

ний, которые можно найти в работах Фролова (1983^а, 1986^а), приведем здесь лишь окончательный результат:

$$\hat{\rho}_N = \prod_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \hat{\rho}_\alpha, \quad (9.4.35)$$

$$\hat{\rho}_\alpha = Q_\alpha : \exp[-Q_\alpha \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha] : = Q_\alpha \exp[\ln(1 - Q_\alpha) \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha],$$

где $Q_\alpha = (1 - \omega_\alpha^2)(1 - \omega_\alpha^2 |R_\alpha|^2)^{-1}$, а $::$ означает операцию нормального упорядочения относительно операторов $\hat{\beta}_\alpha$ и $\hat{\beta}_\alpha^*$. (Последнее равенство написано с учетом известного соотношения: $\exp \tau \hat{\beta}^* \hat{\beta} = \exp[\ln(1 + \tau) \hat{\beta}^* \hat{\beta}]$.)

Для невращающихся черных дыр выражение (9.4.35) было получено Хокингом. Пусть $|n_\alpha\rangle$ — состояние, когда имеется n_α частиц в моде α . Тогда

$$\hat{\rho}_\alpha = \sum_{n_\alpha, n'_\alpha} \rho_{n_\alpha n'_\alpha} |n_\alpha\rangle \langle n'_\alpha|. \quad (9.4.36a)$$

Для невращающейся черной дыры

$$\rho_{n_\alpha n'_\alpha} = \delta_{n_\alpha n'_\alpha} (\Gamma_\alpha)^{n_\alpha} (e^{\omega/\theta} - \epsilon)^\epsilon (e^{\omega/\theta} - \epsilon + \epsilon \Gamma_\alpha)^{-n_\alpha + \epsilon}, \quad (9.4.36b)$$

где $\Gamma_\alpha = |T_\alpha|^2$, а $\epsilon = 1$. Аналогичное выражение справедливо для $\hat{\rho}_\alpha$ и в случае ферми-частиц, с той лишь разницей, что ϵ в этом случае равно -1 , а n_α может принимать значения 0 и 1 [Уолд (1975), Хокинг (1976b)]. Если пренебречь процессами рассеяния на гравитационном поле ($R_\alpha = 0$), то полученное выражение переписывается в следующем виде:

$$\hat{\rho}_N = e^{-\hat{\mathcal{H}}_0/\theta}, \quad (9.4.37a)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_0$ — свободный гамильтониан, описывающий вылетающие на $\mathcal{U}^+$ частицы:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \omega_\alpha \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha, \quad (9.4.37b)$$

а

$$\theta = \kappa/2\pi \quad (9.4.38)$$

— хокинговская температура черной дыры.

Выражение (9.4.35) для матрицы плотности $\hat{\rho}_N$ позволяет вычислять средние значения наблюдаемых $\hat{F} = F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha)$ на $\mathcal{U}^+$:

$$\langle 0; \text{in} | F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha) | 0; \text{in} \rangle = \text{Sp}_\beta(\hat{\rho}_N \hat{F}). \quad (9.4.39)$$

В квантовой теории поля и квантовой статистике хорошо известен и широко употребляется следующий прием, позволяющий существенно упростить вычисления выражений типа (9.4.39). Выберем в качестве $\hat{F}$ оператор

$$\begin{aligned} \hat{K}[\psi, \bar{\psi}] &= \exp\left(\sum_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \psi_\alpha \hat{\beta}_\alpha^*\right) \exp\left(\sum_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \bar{\psi}_\alpha \hat{\beta}_\alpha\right) \equiv \\ &\equiv : \exp\left[\sum_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} (\psi_\alpha \hat{\beta}_\alpha^* + \bar{\psi}_\alpha \hat{\beta}_\alpha)\right] :. \end{aligned} \quad (9.4.40)$$

Заметим теперь, что если оператор $\hat{F}$ в (9.4.39) задан в нормальной форме

$$\begin{aligned}\hat{F} &= F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha) = \\ &= \sum_{m, m'} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_m \\ \alpha'_1, \dots, \alpha'_m}} F_{\alpha_1, \dots, \alpha_m; \alpha'_1, \dots, \alpha'_m} \hat{\beta}_{\alpha_1}^* \dots \hat{\beta}_{\alpha_m}^* \hat{\beta}_{\alpha'_1} \dots \hat{\beta}_{\alpha'_m},\end{aligned}\quad (9.4.41)$$

то его можно записать в следующем виде:

$$F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha) = \left[F \left(\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \right) K(\psi, \bar{\psi}) \right]_{\psi = \bar{\psi} = 0}, \quad (9.4.42)$$

где

$$\begin{aligned}F \left(\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \right) &= \\ &= \sum_{m, m'} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_m \\ \alpha'_1, \dots, \alpha'_m}} F_{\alpha_1, \dots, \alpha_m; \alpha'_1, \dots, \alpha'_m} \times \\ &\times \frac{\partial^m}{\partial \psi_{\alpha_1} \dots \partial \psi_{\alpha_m}} \frac{\partial^m}{\partial \bar{\psi}_{\alpha'_1} \dots \partial \bar{\psi}_{\alpha'_m}}.\end{aligned}\quad (9.4.43)$$

Обозначим

$$Z[\psi, \bar{\psi}] = \text{Sp}_\beta [\hat{\rho}_N \hat{K}(\psi, \bar{\psi})]; \quad (9.4.44)$$

тогда имеем

$$\langle 0; \text{in} | F(\hat{\beta}_\alpha^*, \hat{\beta}_\alpha) | 0; \text{in} \rangle = \left\{ F \left(\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \right) Z[\psi, \bar{\psi}] \right\}_{\psi = \bar{\psi} = 0}. \quad (9.4.45)$$

Иными словами, вместо того чтобы каждый раз заново вычислять $\langle \hat{F} \rangle \equiv \text{Sp}_\beta(\hat{\rho}_N \hat{F})$, достаточно провести вычисления этой величины один раз для $\hat{F} = \hat{K}[\psi, \bar{\psi}]$ и найти величину $Z[\psi, \bar{\psi}]$, которая называется *производящим функционалом*. После этого задача вычисления $\langle \hat{F} \rangle$ сводится к дифференцированию $Z[\psi, \bar{\psi}]$.

Можно посредством небольшой модификации описанного метода существенно расширить класс задач, решаемых с его помощью. Во-первых, оказывается удобным в качестве $\hat{K}$ выбрать следующее выражение:

$$\hat{K}[\psi, \bar{\psi}, \mu] = : \exp \left[- \sum_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} (\mu_\alpha \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha - \psi_\alpha \hat{\beta}_\alpha^* - \bar{\psi}_\alpha \hat{\beta}_\alpha) \right] :. \quad (9.4.46)$$

Поскольку дифференцирование по μ_α приводит к появлению выражения $\hat{n}_\alpha = \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha$, то введение зависимости от μ в $\hat{K}$ позволяет легко вычислять средние от выражений, содержащих операторы числа частиц $\hat{n}_\alpha$. Во-вторых, путем введения дополнительных переменных $\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha$ в Z можно получить формулы, позволяющие вычислять средние от оператора $\hat{F}$ не только в

вакуумном, но и в произвольном многочастичном начальном состоянии. С этой целью заметим, что

$$\langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho}_\Psi \hat{F}), \quad (9.4.47)$$

где

$$\hat{\rho}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (9.4.48)$$

В частности,

$$\langle 0; \text{in} | \hat{F} | 0; \text{in} \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho}_0 \hat{F}), \quad (9.4.49)$$

где

$$\hat{\rho}_0 = |0; \text{in}\rangle\langle 0; \text{in}| = : \exp(-\sum_{\alpha} \hat{a}_{\text{in},\alpha}^* \hat{a}_{\text{in},\alpha}) : \quad (9.4.50)$$

Здесь $:$ — операция нормального упорядочения относительно операторов

$$\hat{a}_{\text{in},\alpha} = iB(\bar{v}_\alpha, \hat{\phi}), \quad \hat{a}_{\text{in},\alpha}^* = -iB(v_\alpha, \hat{\phi}). \quad (9.4.51)$$

Определим производящий функционал $Z[\psi, \mu; \gamma]$ соотношением

$$Z[\psi, \mu; \gamma] = \text{Sp}(\hat{\rho}_\gamma \hat{K}[\psi, \bar{\psi}, \mu]), \quad (9.4.52)$$

где

$$\hat{\rho}_\gamma = \exp[-\sum_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \hat{a}_{\text{in},\alpha}^* \hat{a}_{\text{in},\alpha} + \sum_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} (\gamma_\alpha \hat{a}_{\text{in},\alpha}^* + \gamma_\alpha \hat{a}_{\text{in},\alpha})] : \quad (9.4.53)$$

При $\mu_\alpha = 0, \gamma_\alpha = \bar{\gamma}_\alpha = 0$ $Z[\psi, \mu; \gamma]$ очевидным образом совпадает с выражением (9.4.44).

Явное выражение для производящего функционала $Z[\psi, \mu; \gamma]$ имеет следующий вид [Фролов (1983а*, 1986*)]:

$$Z[\psi, \mu; \gamma] = \prod_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} Z_\alpha[\psi_\alpha, \mu_\alpha; \gamma_\alpha], \quad (9.4.54)$$

где

$$Z_\alpha[\psi_\alpha, \mu_\alpha; \gamma_\alpha] = \frac{Q_\alpha}{C_\alpha} \exp\left(\frac{P_\alpha}{C_\alpha}\right). \quad (9.4.55)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= (1 - w_\alpha^2)(1 - w_\alpha^2 |R_\alpha|^2)^{-1}, \\ C_\alpha &= Q_\alpha + \mu_\alpha - Q_\alpha \mu_\alpha, \\ P_\alpha &= (C_\alpha - \mu_\alpha Q_\alpha |R_\alpha|^2) \bar{\gamma}_\alpha \gamma_\alpha + Q_\alpha R_\alpha \gamma_\alpha \bar{\psi}_\alpha + \\ &+ Q_\alpha \bar{R}_\alpha \bar{\gamma}_\alpha \psi_\alpha + (1 - Q_\alpha) \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha, \end{aligned} \quad (9.4.56)$$

R_α — коэффициент отражения, входящий в соотношение (9.4.15), а w_α определено равенством (9.4.27).

В заключение этого параграфа мы приведем два общих соотношения, устанавливающие связь производящего функционала $Z[\psi, \mu; \gamma]$ с основ-

ными, представляющими физический интерес величинами, характеризующими квантовые эффекты в черных дырах.

Введем следующие обозначения:

$$D_{\alpha}^{l_{\alpha}} = \frac{1}{(l_{\alpha})!} \frac{\partial^{l_{\alpha}}}{\partial \gamma_{\alpha}^{l_{\alpha}}} \frac{\partial^{l_{\alpha}}}{\partial \bar{\gamma}_{\alpha}^{l_{\alpha}}}, \quad \Delta_{\alpha}^{k_{\alpha}} = \frac{1}{(k_{\alpha})!} \frac{\partial^{k_{\alpha}}}{\partial \psi_{\alpha}^{k_{\alpha}}} \frac{\partial^{k_{\alpha}}}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}^{k_{\alpha}}}. \quad (9.4.57)$$

1) Пусть $|\alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{in}\rangle = \hat{a}_{\text{in}, \alpha'_1}^* \dots \hat{a}_{\text{in}, \alpha'_m}^* |0; \text{in}\rangle$, $\hat{Q} = Q(\hat{n}_{\alpha_1}, \dots, \hat{n}_{\alpha_k})$ — функция операторов $\hat{n}_{\alpha} \equiv \hat{\beta}_{\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}$ и $\hat{F} = F(\hat{\beta}_{\alpha}^*, \hat{\beta}_{\alpha})$ — оператор, заданный в нормальной форме вида (9.4.41). Тогда

$$\begin{aligned} & \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{in} | Q(\hat{n}_{\alpha_1}, \dots, \hat{n}_{\alpha_k}) | \alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{in} \rangle = \\ & = \left\{ D_{\alpha'_1}^{l_{\alpha'_1}} \dots D_{\alpha'_m}^{l_{\alpha'_m}} Q \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha_k}} \right) Z[\psi = 0, \mu = 1 - e^{\lambda}; \gamma] \right\}_{\lambda = \gamma = 0}, \end{aligned} \quad (9.4.58)$$

$$\begin{aligned} & \langle \alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{in} | F(\hat{\beta}_{\alpha}^*, \hat{\beta}_{\alpha}) | \alpha'_1, \dots, \alpha'_m; \text{in} \rangle = \\ & = \left\{ D_{\alpha'_1}^{l_{\alpha'_1}} \dots D_{\alpha'_m}^{l_{\alpha'_m}} F \left(\frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}} \right) Z[\psi, \mu = 0; \gamma] \right\}_{\psi = \gamma = 0}. \end{aligned} \quad (9.4.59)$$

2) Пусть $P(k_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_n} | l_{\alpha_1}, \dots, l_{\alpha_n})$ — вероятность излучения черной дырой на $\mathcal{J}^+$ k_{α_i} квантов в режиме $u_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_n}$ квантов в режиме u_{α_n} при условии, что на $\mathcal{J}^-$ имелось l_{α_1} квантов в режиме $v_{\alpha_1}, \dots, l_{\alpha_n}$ квантов в режиме v_{α_n} ($k_{\alpha_i} \geq 0$, $l_{\alpha_i} \geq 0$, $k_{\alpha_i} + l_{\alpha_i} > 0$). Тогда справедливы равенства

$$P(k_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_n} | l_{\alpha_1}, \dots, l_{\alpha_n}) = P(k_{\alpha_1} | l_{\alpha_1}) \dots P(k_{\alpha_n} | l_{\alpha_n}), \quad (9.4.60)$$

$$P(k_{\alpha} | l_{\alpha}) = (D_{\alpha}^{l_{\alpha}} \Delta_{\alpha}^{k_{\alpha}} Z_{\alpha}[\psi_{\alpha}, 1; \gamma_{\alpha}])_{\gamma_{\alpha} = \psi_{\alpha} = 0}.$$

Таким образом, вычисление средних значений наблюдаемых, корреляционных функций и распределений вероятностей для квантовых процессов в поле черной дыры эффективно сводится к выполнению операций дифференцирования производящего функционала Z , определяемого соотношениями (9.4.54) — (9.4.56). Подчеркнем, что производящий функционал полностью определен, если наряду с поверхностной гравитацией κ и угловой скоростью Ω^H черной дыры известны также коэффициенты отражения R_{α} и поглощения T_{α} волновых пакетов v_{α} черной дырой. При этом, по описанным выше причинам, достаточно значения этих величин для волновых пакетов v_{α} , движущихся в стационарной метрике Керра образовавшейся черной дыры. Нахождение коэффициентов R_{α} и T_{α} требует решения одномерной задачи рассеяния. Запишем решение $v_{\omega l m}$ уравнения (9.4.1) в метрике Керра в виде

$$v_{\omega l m} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} e^{-i\omega t} w_{\omega l m}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (9.4.61)$$

где $w_{\omega lm}(r)$ удовлетворяет радиальному уравнению

$$\frac{d^2}{dr^{*2}} w_{\omega lm} + U_{\omega lm} w_{\omega lm} = 0 \quad (9.4.62)$$

и следующим граничным условиям:

$$w_{\omega lm} \sim \begin{cases} e^{-i\omega r^*} + R_{\omega lm} e^{i\omega r^*}, & r^* \rightarrow \infty, \\ \left| \frac{\omega}{\tilde{\omega}} \right|^{1/2} T_{\omega lm} e^{-i\tilde{\omega} r^*}, & r^* \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (9.4.63)$$

Здесь

$$\tilde{\omega} = \omega - m\Omega^H, \quad \frac{dr^*}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{r^2 - 2Mr + a^2}, \quad (9.4.64)$$

$$U_{\omega lm} = (\tilde{\omega} - A_{\omega lm})^2 - B_{\omega lm}, \quad (9.4.65)$$

$$A_{\omega lm} = \frac{am}{r^2 + a^2} - \Omega^H m,$$

$$B_{\omega lm} = \Delta \left[\frac{\lambda_l^m - 2a\omega m}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{1}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \frac{d}{dr} \left(\frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right) \right], \quad (9.4.66)$$

а λ_l^m — собственное значение, отвечающее функции S_l^m (9.4.3).

Задача нахождения $R_{\omega lm}$ и $T_{\omega lm}$, а также ее аналог для полей с другими характеристиками (спином, отличным от нуля, массой и зарядом) подробно исследовались в многочисленных работах. Ее подробное обсуждение и явные выражения для коэффициентов отражения и поглощения, отвечающие этим случаям, см. Чандрасекар (1983), где приведены также ссылки на оригинальные работы.

§ 9.5. Частные случаи

В этом разделе мы обсудим ряд конкретных результатов, вытекающих из общих соотношений (9.4.58)–(9.4.60).

а) Эффект Хокинга. Пусть первоначально, до образования черной дыры, система находилась в вакуумном состоянии. После возникновения черной дыры она становится источником излучения, причем среднее число частиц, излучаемых ею в моде α и регистрируемых отдаленным наблюдателем, дается следующим выражением:

$$\langle \hat{n}_\alpha \rangle_0 \equiv \langle 0; \text{in} | \hat{n}_\alpha | 0; \text{in} \rangle = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} Z_\alpha[0, 1 - e^{\lambda_\alpha}; 0] \right\}_{\lambda_\alpha=0} = \frac{\Gamma_\alpha}{\exp(\tilde{\omega}_\alpha/\theta) - 1}, \quad (9.5.1)$$

где $\Gamma_\alpha = \sigma_\alpha |T_\alpha|^2$, $\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - m_\alpha \Omega^H$, $\theta = \kappa/2\pi$ — температура черной дыры. Отметим, что хотя при $\tilde{\omega}_\alpha = 0$ знаменатель (9.5.1) обращается в нуль, среднее число частиц, рождающихся в подобных модах, остается конечным, поскольку одновременно обращается в нуль и $|T_\alpha|^2$. Можно также убедиться, что изменение знака знаменателя при $\tilde{\omega}_\alpha < 0$ сопровождается изменением знака σ_α , так что в целом выражение (9.5.1) остается всегда положительным.

Поскольку коэффициент поглощения пакета ν_α стационарной черной дырой не зависит от момента времени $\nu = 2\pi n/E$, когда этот пакет был испущен, то число частиц, вылетающих на $\mathcal{U}^+$, не зависит от момента запаздывающего времени u . Иными словами, образовавшаяся черная дыра становится источником стационарного излучения. Появление стационарного потока (мы уже отмечали это выше) можно интерпретировать как следствие спонтанного процесса рождения пар частиц в стационарном гравитационном поле вблизи горизонта событий, в результате которого одна из частиц падает внутрь черной дыры, а другая вылетает на бесконечность *).

Возможна также другая интерпретация результата (9.5.1), в рамках которой более отчетливо выявляется роль нестационарности гравитационного поля в процессе образования черной дыры [эта интерпретация обсуждается, например, в работах Герлаха (1976) и Зельдовича (1976*)]. Рассмотрим поведение волнового пакета, испущенного с $\mathcal{U}^-$ при $\nu < 0$ с характерной частотой ω так, что он проходит коллапсирующее тело и выходит наружу непосредственно перед моментом образования горизонта. Такой пакет испытывает сильное красное смещение, и его характерная частота становится ω' . Как бы велика ни была частота ω , найдется такой момент $\nu < 0$, начиная с которого $\omega' \lesssim 1/T_g$, где $T_g = r_g/c$ — характерное время гравитационного коллапса.

Для подобных квантов действие переменного гравитационного поля коллапсирующей системы является существенно неадиабатически. Число квантов при неадиабатическом возмущении уже не сохраняется, а в вакуумном состоянии происходит рождение частиц. Чем больше частота нулевых вакуумных колебаний, тем ближе к горизонту они должны двигаться для того, чтобы оказалось выполненным условие неадиабатичности и родился реальный квант, и тем позднее выйдет он к отдаленному наблюдателю. Поскольку в вакууме имеются нулевые колебания со сколь угодно высокой частотой, этот процесс приводит к бесконечно растянутому во времени процессу излучения черной дыры.

Заметим, что в плоском пространстве процессы рождения частиц стационарным полем и полем, изменяющимся во времени, довольно существенно отличаются по своим характеристикам [см., например, Швингер (1956*)]. Особенность задачи о рождении частиц в черных дырах состоит в том, что рождение происходит в окрестности горизонта событий, который является *светоподобной поверхностью*. Именно поэтому описанные "стационарная" и "нестационарная" интерпретации этого эффекта не противоречат, а взаимно дополняют друг друга.

б) **Индукцированное излучение.** Пусть на черную дыру с $\mathcal{U}^-$ падает m частиц в моде α . Тогда для среднего значения числа частиц в состоянии α

*) Унру (1981) обратил внимание на то, что явление квантового рождения частиц в черных дырах допускает гидродинамическую аналогию. Если при течении жидкости или газа имеется замкнутая двумерная поверхность, разделяющая области дозвукового и сверхзвукового течения (согласно Лавалю), то в подобной системе должно возникнуть излучение фононов с тепловым спектром.

на $\mathcal{J}^+$ получаем, используя (9.4.58), следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_\alpha \rangle_m &= \langle m_\alpha; \text{in} | \hat{n}_\alpha | m_\alpha; \text{in} \rangle = \\ &= \{ D_\alpha^{m_\alpha} [(-1 + Q_\alpha^{-1} + |R_\alpha|^2 \bar{\gamma}_\alpha \gamma_\alpha) e^{\bar{\gamma}_\alpha \gamma_\alpha}] \}_{\gamma=0} = \langle \hat{n}_\alpha \rangle_0 + m_\alpha |R_\alpha|^2. \end{aligned} \quad (9.5.2)$$

Член $\langle \hat{n}_\alpha \rangle_0$ описывает спонтанное рождение частиц из вакуума и дается выражением (9.5.1). В работе Бекенштейна, Майзельса (1977) было обращено внимание на то, что полученное выражение можно эквивалентным образом переписать в следующем виде:

$$\langle \hat{n}_\alpha \rangle_m = A_\alpha^\dagger + B_\alpha^\dagger m_\alpha + (1 - B_\alpha^\dagger) m_\alpha, \quad (9.5.3)$$

а величины

$$A_\alpha^\dagger = B_\alpha^\dagger = \langle \hat{n}_\alpha \rangle_0 = \frac{\sigma_\alpha |T_\alpha|^2}{\exp(\tilde{\omega}_\alpha/\theta) - 1}, \quad (9.5.4)$$

$$B_\alpha^\dagger = \frac{\sigma_\alpha |T_\alpha|^2}{1 - \exp(-\tilde{\omega}_\alpha/\theta)} \quad (9.5.5)$$

можно интерпретировать как аналог коэффициентов Эйнштейна для процессов в черных дырах. Член $A_\alpha^\dagger$ описывает спонтанное рождение частиц из вакуума, $B_\alpha^\dagger$ играет роль коэффициента поглощения, а $B_\alpha^\dagger m_\alpha$ описывает индуцированное излучение частиц в моде α .

Величину $1 - B_\alpha^\dagger$ можно интерпретировать как вероятность рассеяния моды α черной дырой. Используя (9.4.16) и (9.5.4), запишем выражение для $|R_\alpha|^2$ в следующем виде:

$$|R_\alpha|^2 = (1 - B_\alpha^\dagger) + B_\alpha^\dagger. \quad (9.5.6)$$

Это соотношение показывает, что величина $|R_\alpha|^2$, характеризующая рассеяние черной дырой частицы в моде α , является суммой вероятности рассеяния $1 - B_\alpha^\dagger$ падающей частицы и вероятности индуцированного излучения $B_\alpha^\dagger$ в этой моде. Поскольку $B_\alpha^\dagger = B_\alpha^\dagger \exp(-\tilde{\omega}_\alpha/\theta)$, то для суперрадиационных мод коэффициент индуцированного излучения $B_\alpha^\dagger$ превосходит коэффициент поглощения $B_\alpha^\dagger$ и $|R_\alpha|^2$ принимает значения, большие единицы.

Соотношения (9.5.3)–(9.5.5) показывают, что излучение черной дыры подчинено тем же законам, что и излучение нагретых тел. Имеется, однако, весьма существенное отличие. Температура черной дыры определяется теми же параметрами (массой и угловым моментом), что и ее геометрические размеры, в то время как для обычного тела температура – независимый параметр.

в) **Рассеяние когерентной волны.** Выше мы уже отмечали, что имеется тесная связь процессов распространения во внешнем поле классической волны и отдельных квантов. Проследим эту связь более подробно для случая рассеяния на черной дыре. Рассмотрим падающую на черную дыру классическую волну, которая с квантовой точки зрения описывается как когерентная совокупность квантов и характеризуется следующим когерентным состоянием:

$$|\gamma_\beta; \text{in}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{\gamma}_\beta \gamma_\beta\right) \exp(\gamma_\beta \hat{a}_{\text{in},\beta}^*) |0; \text{in}\rangle. \quad (9.5.7)$$

Условие нормировки этого состояния

$$\langle \gamma_\beta; \text{in} | \gamma_\beta; \text{in} \rangle = 1 \quad (9.5.8)$$

вытекает из следующего соотношения [см., например, Клаудер, Сударшан (1968)]:

$$e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} = e^{[\hat{X}, \hat{Y}]} e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}}, \quad (9.5.9)$$

которое выполняется для произвольных операторов $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ таких, что $[\hat{X}, \hat{Y}]$ коммутирует с $\hat{X}$ и $\hat{Y}$.

С помощью простой проверки легко убедиться, что

$$\hat{a}_{\text{in}, \beta} e^{\gamma_\beta \hat{a}_{\text{in}, \beta}^*} = e^{\gamma_\beta \hat{a}_{\text{in}, \beta}^*} (\hat{a}_{\text{in}, \beta} + \gamma_\beta). \quad (9.5.10)$$

Используя это соотношение, можно показать, что среднее значение образа $\hat{\Phi}_{\text{in}}$ поля $\hat{\phi}$ на $\mathcal{J}^-$:

$$\hat{\Phi}_{\text{in}} = \sum_{\alpha} (V_{\alpha} \hat{a}_{\text{in}, \alpha}^* + \bar{V}_{\alpha} \hat{a}_{\text{in}, \alpha}) \quad (9.5.11)$$

в когерентном состоянии (9.5.7) дается следующим выражением:

$$\Phi_{\gamma_{\alpha}}^{\text{in}} \equiv \langle \gamma_{\beta}; \text{in} | \hat{\Phi}_{\text{in}} | \gamma_{\beta}; \text{in} \rangle = \gamma_{\beta} \bar{V}_{\beta} + \bar{\gamma}_{\beta} V_{\beta}. \quad (9.5.12)$$

Для образа Φ_{out} рассеянной волны на $\mathcal{J}^+$ имеем

$$\Phi_{\gamma_{\beta}}^{\text{out}} \equiv \langle \gamma_{\beta}; \text{in} | \hat{\Phi}_{\text{out}} | \gamma_{\beta}; \text{in} \rangle. \quad (9.5.13)$$

Заметим теперь, что справедливы соотношения

$$| \gamma_{\beta}; \text{in} \rangle \langle \gamma_{\beta}; \text{in} | = e^{-\bar{\gamma}_{\beta} \gamma_{\beta}} \hat{\rho}_{\gamma_{\beta}}, \quad (9.5.14)$$

$$\Phi_{\gamma_{\beta}}^{\text{out}} = e^{-\bar{\gamma}_{\beta} \gamma_{\beta}} \text{Sp}(\hat{\rho}_{\gamma_{\beta}} \hat{\Phi}_{\text{out}}). \quad (9.5.15)$$

$$\hat{\Phi}_{\text{out}} \equiv \sum_{\alpha} (U_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha}^* + \bar{U}_{\alpha} \hat{\beta}_{\alpha}), \quad (9.5.16)$$

$$\hat{\Phi}_{\text{out}} = \left\{ \sum_{\alpha} \left(U_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha}} + \bar{U}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}} \right) \hat{K}[\psi, \bar{\psi}, 0] \right\}_{\psi=\bar{\psi}=0}, \quad (9.5.17)$$

где $\hat{\rho}_{\gamma}$ и $\hat{K}$ даются соответственно выражениями (9.4.53) и (9.4.46), причем в (9.4.53) отличны от нуля только те члены с γ_{α} и $\bar{\gamma}_{\alpha}$, в которых индекс α совпадает с β . Эти соотношения позволяют установить следующую связь $\Phi_{\gamma_{\beta}}^{\text{out}}$ с функционалом Z :

$$\Phi_{\gamma_{\beta}}^{\text{out}} = e^{-\bar{\gamma}_{\beta} \gamma_{\beta}} \left\{ \sum_{\alpha} \left(U_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha}} + \bar{U}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}} \right) Z[\psi, 0; \gamma] \right\}_{\psi=0}. \quad (9.5.18)$$

Используя выражения (9.4.54)–(9.4.56) для Z , окончательно получаем

$$\Phi_{\gamma_{\beta}}^{\text{out}} = \gamma_{\beta} R_{\beta} \bar{U}_{\beta} + \gamma_{\beta} \bar{R}_{\beta} U_{\beta}. \quad (9.5.19)$$

Иными словами, отношение квадрата амплитуды рассеянной волны к

квадрату амплитуды падающей равно $|R_\beta|^2$. Эта величина больше единицы, т.е. происходит усиление тех мод, для которых выполнено условие суперрадиации $\sigma_\alpha < 0$.

г) Потеря энергии и углового момента черной дырой при квантовом излучении. Если Φ_{out} — образ поля φ на $\mathcal{Y}^+$, то интенсивности потерь системой энергии dE/du и углового момента dJ/du , вызываемых излучением этого поля, даются следующими выражениями [ср. с (5.1.18)]:

$$-\frac{dE}{du} = \int d\Omega \frac{\partial}{\partial u} \Phi_{out} \frac{\partial}{\partial u} \Phi_{out}, \quad (9.5.20)$$

$$-\frac{dJ}{du} = \int d\Omega \frac{\partial}{\partial u} \Phi_{out} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi_{out}, \quad (9.5.21)$$

где интегрирование ведется по сфере S^2 , $u = \text{const}$ на $\mathcal{Y}^+$ и $d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ — элемент площади S^2 .

В квантовом случае Φ_{out} следует заменить оператором $\hat{\Phi}_{out}$, симметризовать выражение и произвести усреднение (9.5.20) и (9.5.21) по некоторому состоянию, отвечающему определенному выбору начальных условий. Поскольку в полученном выражении встречаются операторы поля в совпадающих точках, то требуется еще задать определенные правила регуляризации. В рассматриваемом случае эти правила крайне просты и сводятся к тому, что вместо рассматриваемого выражения берется его нормальная форма относительно операторов $\hat{\beta}_\alpha^*$ и $\hat{\beta}_\alpha$. Причина обсуждаемой расходимости состоит в наличии вакуумных нулевых колебаний, приводящих к тому, что даже в отсутствие внешнего поля имеются указанные расходимости. Задача, интересующая нас, состоит в изучении влияния внешнего поля на состояние квантовой системы. Поэтому нам важны не потоки энергии и момента, связанные с флуктуациями вакуума в плоском пространстве, а лишь измеримые приборами изменения этих потоков, вызванные возникновением черной дыры, и мы должны произвести вычитание из рассматриваемых величин аналогичных средних по аут-вакуумному состоянию. Нетрудно убедиться, что эта процедура эквивалентна описанному выше переходу к нормальной форме.

Для простоты ограничимся случаем, когда до образования черной дыры система находилась в вакуумном состоянии. Пусть $(\xi = (u, \theta, \varphi), \xi' = (u', \theta', \varphi'))$

$$G(\xi, \xi') = \langle 0; \text{in} | : \hat{\Phi}_{out}(u, \theta, \varphi) \hat{\Phi}_{out}(u', \theta', \varphi') : | 0; \text{in} \rangle; \quad (9.5.22)$$

тогда

$$-\frac{dE}{du} = \int d\Omega \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u'} G(u, \theta, \varphi; u', \theta, \varphi) \right]_{u'=u}, \quad (9.5.23)$$

$$-\frac{dJ}{du} = \int d\Omega \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \varphi'} G(u, \theta, \varphi; u', \theta, \varphi') \right]_{\substack{u'=u \\ \varphi'=\varphi}}. \quad (9.5.24)$$

Используя для вычисления $G(\xi, \xi')$ разложение (9.5.16) оператора $\hat{\Phi}_{out}$

и соотношение (9.4.59), имеем

$$G(\xi, \xi') = \left\{ \sum_{\alpha, \alpha'} \left[U_{\alpha}(\xi) \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha}} + \bar{U}_{\alpha}(\xi) \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha}} \right] \times \right. \\ \times \left. \left[U_{\alpha'}(\xi') \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha'}} + \bar{U}_{\alpha'}(\xi') \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha'}} \right] Z[\psi, 0; 0] \right\}_{\psi=0} = \\ = \sum_{\alpha} \langle \hat{n}_{\alpha} \rangle_0 [\bar{U}_{\alpha}(\xi) U_{\alpha}(\xi') + \bar{U}_{\alpha}(\xi') U_{\alpha}(\xi)], \quad (9.5.25)$$

где $\langle \hat{n}_{\alpha} \rangle_0$ — среднее число частиц в моде α , излучаемое черной дырой и описываемое выражением (9.5.1). Заметим, что поскольку суммирование в (9.5.25) ведется по полной системе функций, можно вместо U_{α} использовать любую другую полную систему функций на $\mathcal{U}^+$. Удобно, в частности, переписать (9.5.25) в следующем виде:

$$G(\xi, \xi') = \int_0^{\infty} d\omega \sum_{l, m} \langle \hat{n}_{\omega l m} \rangle_0 [\bar{U}_{\omega l m}(\xi) U_{\omega l m}(\xi') + \\ + \bar{U}_{\omega l m}(\xi') U_{\omega l m}(\xi)], \quad (9.5.26)$$

где

$$U_{\omega l m}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (9.5.27)$$

Подставляя это разложение G в (9.5.23) и (9.5.24), выполняя операции дифференцирования и интегрируя по угловым переменным с использованием условий нормировки (9.4.4), окончательно получаем

$$-\frac{dE}{du} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sum_{l, m} \frac{\sigma_{\omega l m} \omega |T_{\omega l m}|^2}{\exp(\tilde{\omega}/\theta) - 1}, \quad (9.5.28)$$

$$-\frac{dJ}{du} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sum_{l, m} \frac{\sigma_{\omega l m} m |T_{\omega l m}|^2}{\exp(\tilde{\omega}/\theta) - 1}. \quad (9.5.29)$$

Если масса черной дыры велика, так что температура очень мала, то

$$\frac{\sigma_{\omega l m}}{\exp(\tilde{\omega}/\theta) - 1} \approx \frac{1}{2} (1 - \sigma_{\omega l m}). \quad (9.5.30)$$

В этом пределе вклад в излучение дают только моды, удовлетворяющие условию суперрадиации, и мы имеем

$$-\frac{dE}{du} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l, m} \int_0^{\infty} d\omega \omega |T_{\omega l m}|^2, \quad (9.5.31)$$

$$-\frac{dJ}{du} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l, m} \int_0^{\infty} d\omega m |T_{\omega l m}|^2. \quad (9.5.32)$$

д) Энтропия излучения черной дыры. Определим энтропию S для системы, описываемой матрицей плотности $\hat{\rho}$, соотношением

$$S = \text{Sp}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \quad (9.5.33)$$

Нетрудно убедиться, что если $\hat{\rho}$ записывается в виде

$$\hat{\rho} = \prod_{\alpha} \hat{\rho}_{\alpha}, \quad (9.5.34)$$

где $\hat{\rho}_{\alpha}$ — оператор, зависящий только от операторов разложения $\hat{\beta}_{\alpha}^*$ и уничтожения $\hat{\beta}_{\alpha}$ в моде α , то S представляется в виде суммы:

$$S = \sum_{\alpha} S_{\alpha}, \quad (9.5.35)$$

где

$$S_{\alpha} = \text{Sp}_{\alpha}(\hat{\rho}_{\alpha} \ln \hat{\rho}_{\alpha}). \quad (9.5.36)$$

Здесь Sp_{α} обозначает операцию взятия следа в пространстве, порождаемом действием $\hat{\beta}_{\alpha}^*$ на вакуум.

Как уже отмечалось ранее, коэффициент отражения R_{jnlm} волнового пакета v_{jnlm} для достаточно больших значений $n \geq N$ от n не зависит. Поэтому оператор ρ_{α} , определяемый соотношением (9.4.35), также не зависит от n и, следовательно, для излучения от стационарной черной дыры выражение (9.5.35) расходится. Поэтому удобно вместо полной излученной энтропии S ввести скорость возрастания энтропии во внешнем пространстве dS/du , связанной с излучением. Для этого заметим, что волновые пакеты u_{jnlm} с фиксированным значением n выходят на $\mathcal{I}^+$ в интервале запаздывающего времени от $2\pi(n - 1/2)/E$ до $2\pi(n + 1/2)/E$. Поэтому определим ($\alpha = jnlm$)

$$\frac{dS}{du} = \frac{E}{2\pi} \sum_{jlm} \text{Sp}_{\alpha}(\hat{\rho}_{\alpha} \ln \hat{\rho}_{\alpha}). \quad (9.5.37)$$

Заметим теперь, что поскольку входящие в это выражение величины гладко зависят от частоты ω и слабо изменяются при изменении ее в интервале от jE до $(j + 1)E$, то можно заменить суммирование по j интегрированием по частоте ω :

$$E \sum_j (\dots) = \int_0^{\infty} d\omega (\dots). \quad (9.5.38)$$

В результате, используя выражение (9.4.35) для $\hat{\rho}_{\alpha}$, получаем

$$\frac{dS}{du} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \sum_{l,m} \left[\frac{\Gamma_{\alpha}}{z_{\alpha} - \epsilon} \ln \left(\frac{z_{\alpha} - \epsilon}{\Gamma_{\alpha}} + \epsilon \right) + \epsilon \ln \left(1 + \frac{\epsilon \Gamma_{\alpha}}{z_{\alpha} - \epsilon} \right) \right], \quad (9.5.39a)$$

где $\Gamma_{\alpha} = \alpha_{\alpha} |T_{\alpha}|^2$, $z_{\alpha} = \exp(\tilde{\omega}_{\alpha}/\theta)$, $\epsilon = 1$. Это же выражение оказывается справедливым и для ферми-полей, если в нем положить $\epsilon = -1$. Аналогичное выражение имеет место для полей различных спинов и для массивных полей. При этом суммирование распространяется на все квантовые числа, нумерующие состояния, а интегрирование при наличии у поля массы μ ведется, начиная с μ . Вклады нейтринного ($s = 1/2$), фотонного ($s = 1$) и гравитационного ($s = 2$) полей в энтропию излучения невращающейся черной дыры можно записать следующим образом [Пэйдж (1983)]:

$$\frac{dS}{du} = 10^{-3} M^{-1} (1,685 h \left(\frac{1}{2} \right) + 0,634 h(1) + 0,065 h(2)), \quad (9.5.39b)$$

где $h(s)$ — число поляризаций поля спина s .

е) Распределение вероятностей. Вероятность $P(k_\alpha | l_\alpha)$ обнаружить в излучении черной дыры потоке частиц в состоянии u_α при условии, что в падающем на черную дыру потоке имеется l_α частиц в состоянии v_α , дается общим выражением (9.4.60). Можно показать, что это выражение может быть преобразовано к следующему виду [Бекенштейн, Майзельс (1977), Папангаден, Уолд (1977)]:

$$P(k_\alpha | l_\alpha) = (l_\alpha)! (k_\alpha)! \frac{w_\alpha^{2k_\alpha} (1 - w_\alpha^2) (1 - |R_\alpha|^2)^{k_\alpha + l_\alpha}}{(1 - w_\alpha^2 |R_\alpha|^2)^{k_\alpha + l_\alpha + 1}} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\min(k_\alpha, l_\alpha)} \left\{ \frac{1}{(l_\alpha - n)! (k_\alpha - n)! (n!)^2} \left[\frac{(1 - w_\alpha^2)^2 |R_\alpha|^2}{(1 - |R_\alpha|^2)^2 w_\alpha^2} \right]^n \right\}. \quad (9.5.40)$$

Нетрудно убедиться, что

$$e^{-(\tilde{\omega}_\alpha/\theta) l_\alpha} P(k_\alpha | l_\alpha) = e^{-(\tilde{\omega}_\alpha/\theta) k_\alpha} P(l_\alpha | k_\alpha). \quad (9.5.41)$$

Ниже мы покажем, что это условие обеспечивает детальное равновесие между черной дырой и полостью, вращающейся с угловой скоростью Ω^H и заполненной чернотельным излучением с температурой θ .

ж) Черная дыра в "тепловой бане". Если вне черной дыры отсутствует вещество, то описанное выше хокинговское излучение является единственным процессом, изменяющим состояние стационарной черной дыры. При наличии вне ее вещества или излучения одновременно с хокинговским излучением идет процесс аккреции этого вещества и излучения на черную дыру. Оказывается, что при выполнении определенного согласования параметров окружающего черную дыру распределения вещества с параметрами черной дыры возможна равновесная ситуация, при которой потеря частиц в каждой моде в результате аккреции компенсируется излучением черной дыры в этой моде. В простейшем случае, когда можно пренебречь взаимодействием различных сортов частиц, эти условия равновесия, очевидно, должны выполняться для каждого из сортов частиц по отдельности. Ниже мы обсудим условие равновесия черной дыры с газом безмассовых скалярных частиц.

Предположим, что матрица плотности $\hat{\rho}_{in}$, описывающая состояние таких частиц вне стационарной черной дыры (на $\mathcal{J}^-$), имеет вид

$$\hat{\rho}_{in} = \prod_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \hat{\rho}_{in, \alpha}, \\ \hat{\rho}_{in, \alpha} = \rho_{0, \alpha} : \exp [-(1 + \mu_\alpha) \hat{a}_{in, \alpha}^* \hat{a}_{in, \alpha}] :. \quad (9.5.42)$$

Можно убедиться [Фролов, 1986*], что матрица плотности $\hat{\rho}_{out}$, описывающая излучение черной дыры на $\mathcal{J}^+$, при указанном выборе начального условия (9.5.42) дается следующим выражением:

$$\hat{\rho}_{out} = \prod_{\substack{\alpha \\ n \geq N}} \hat{\rho}_{out, \alpha}, \\ \hat{\rho}_{out, \alpha} = \rho_{0, \alpha} D_\alpha : \exp [-(1 + \mu_\alpha) D_\alpha \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha] :, \quad (9.5.43)$$

где

$$D_{\alpha} = \frac{1 - w_{\alpha}^2}{1 + \mu_{\alpha} - (\mu_{\alpha} + w_{\alpha}^2) |R_{\alpha}|^2}.$$

Условие равновесия, означающее, что распределение для выходящих частиц совпадает с распределением падающих, эквивалентно условию $D_{\alpha} = 1$, которое выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mu_{\alpha} = -w_{\alpha}^2 = -\exp(-\tilde{\omega}_{\alpha}/\theta). \quad (9.5.44)$$

Предположим, что рассматриваемая черная дыра окружена стационарной аксиально-симметричной зеркальной отражающей поверхностью. При отражении от такой поверхности частицы сохраняют свой угловой момент и энергию, и действие этой поверхности на волновые пакеты состоит в превращении моды u_{α} в моду $-u_{\alpha}$. Если выполнено условие (9.5.44), то излучение в полости будет находиться в состоянии равновесия с черной дырой, а соответствующая этому равновесному состоянию матрица плотности имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\theta} &= \prod_{\alpha} \hat{\rho}_{\alpha}, \\ \hat{\rho}_{\alpha} &= \rho_{\alpha}^0 \exp\left(-\frac{\tilde{\omega}_{\alpha}}{\theta} \hat{\beta}_{\alpha}^* \hat{\beta}_{\alpha}\right), \end{aligned} \quad (9.5.45)$$

где ρ_{α}^0 — нормировочная константа, а $\hat{\beta}_{\alpha}^*$ и $\hat{\beta}_{\alpha}$ — операторы рождения и уничтожения в моде α .

Этот же результат можно описать несколько иначе. Если $\text{Sp } \hat{\rho}_{\alpha} = 1$, то вероятность обнаружить в моде α k_{α} квантов для распределения (9.5.45) равна

$$P(k_{\alpha}) = \frac{e^{-(\tilde{\omega}_{\alpha}/\theta)k_{\alpha}}}{1 - e^{-\tilde{\omega}_{\alpha}/\theta}}. \quad (9.5.46)$$

С учетом равенства (9.5.41) для условной вероятности $P(l_{\alpha} | k_{\alpha})$ это соотношение позволяет заключить, что вероятность $P(l_{\alpha} | k_{\alpha})P(k_{\alpha})$ встретить в заданном распределении в моде α l_{α} выходящих квантов и k_{α} входящих равна вероятности $P(k_{\alpha} | l_{\alpha})P(l_{\alpha})$ встретить k_{α} выходящих и l_{α} входящих квантов, т.е. выполнен детальный баланс, обеспечивающий термодинамическое равновесие между полостью и черной дырой в данной моде.

Отметим особо, что матрица плотности (9.5.43) нормируема и действительно описывает реальное физическое состояние только в том случае, когда $\mu_{\alpha} > -1$. Для суперрадиационных мод $\tilde{\omega}_{\alpha} \leq 0$ условие равновесия (9.5.44) противоречит условию нормируемости матрицы плотности $\hat{\rho}_{\text{in}}$. Этот результат допускает следующую интерпретацию. Рассмотрим вращающуюся черную дыру, окруженную зеркальной полостью. Пусть в некоторый момент времени имеется произвольное (нормируемое) распределение частиц в выбранной суперрадиационной моде α . Тогда в результате рассеяния этой моды черной дырой число квантов в ней увеличится. После отражения оболочкой эти кванты вновь рассеиваются черной дырой, и их число вновь возрастает. Иными словами, система, состоящая из черной дыры и окружающей ее оболочки, для суперрадиационных мод выполняет роль

генератора, и равновесное стационарное распределение для подобных мод оказывается невозможным.

Полученный вывод не означает, вообще говоря, что вращающаяся черная дыра не может находиться в равновесии с газом излучения внутри полости. Требуется лишь, чтобы размеры этой полости были не слишком велики ($r \lesssim (\Omega^H)^{-1}$), т.е. чтобы в системе отсутствовали суперрадиационные моды.

Этот вывод подтверждается также следующим рассуждением. Заметим, что волновые моды $\varphi_{\omega lm} = \exp(-i\omega t + im\varphi)f_{\omega lm}(r, \theta)$ являются собственными для оператора $\eta^\mu \partial_\mu$, где

$$\eta = \xi_t + \Omega^H \xi_\varphi, \quad (9.5.47)$$

а именно

$$\eta^\mu \partial_\mu \varphi_{\omega lm} = -i\tilde{\omega} \varphi_{\omega lm}. \quad (9.5.48)$$

Предположим, что окружающая черную дыру зеркальная оболочка совпадает с поверхностью, на которой $\eta \cdot \eta = \text{const}$, и угловая скорость вращения оболочки равна Ω^H . Наблюдатель, покоящийся на этой поверхности, обладает скоростью

$$u^\mu = \eta^\mu / U, \quad U^2 \equiv -\eta \cdot \eta, \quad (9.5.49)$$

и в его системе отсчета мода $\varphi_{\omega lm}$ обладает частотой $\omega' = \tilde{\omega}/U$. Заметим теперь, что равновесную матрицу плотности (9.5.45) можно записать в виде

$$\hat{\rho}_\alpha = \rho_{0,\alpha} \exp\left(-\frac{\omega'_\alpha}{T} \hat{\beta}_\alpha^* \hat{\beta}_\alpha\right), \quad (9.5.50)$$

где

$$T = \kappa/2\pi U. \quad (9.5.51)$$

Это означает, что вращающаяся *поглощающая* оболочка, внутри которой заключена черная дыра, не нарушает равновесия, если температура ее поверхности равна T . Если поверхность оболочки не совпадает с поверхностью, на которой $\eta \cdot \eta = \text{const}$, то в условии равновесия температура этой оболочки обязана равняться (9.5.51), где

$$U^2 = -\eta \cdot \eta = \Sigma^{-1} \{ \Delta(1 - a\Omega^H \sin^2 \theta)^2 - \sin^2 \theta [a - \Omega^H(r^2 + a^2)]^2 \}. \quad (9.5.52)$$

Назовем "световым цилиндром" поверхность вне черной дыры, на которой выполнено условие

$$\eta \cdot \eta = 0. \quad (9.5.53)$$

Решение уравнения (9.5.53) для метрики Керра в координатах Бойера – Линдквиста имеет вид

$$|\sin \theta| = \frac{\sqrt{X^2 + 4a\Omega^H} - X}{2a\Omega^H}, \quad X^2 = \frac{[\Omega^H(r^2 + a^2) - a]^2}{\Delta}, \quad r > r_+. \quad (9.5.54)$$

Действительная функция T , заданная соотношениями (9.5.51) – (9.5.52), определена и ограничена в области, лежащей между горизонтом событий и поверхностью "светового цилиндра". В соответствии с этим равновесное

состояние, описываемое матрицей плотности (9.5.45), возможно только, если оболочка, окружающая черную дыру, также расположена в этой области (при этом $r_0 \lesssim (\Omega^H)^{-1}$).

Для невращающейся черной дыры равновесие с газом излучения возможно при любом размере полости *); при этом для равновесия необходимо, чтобы температура излучения вдали от черной дыры совпадала с ее хоккингской температурой.

Вывод о возможности теплового равновесия черной дыры с газом излучения при условии совпадения их температур и угловых скоростей **) имеет общий характер. Как показали Гиббонс, Перри (1978), он может быть распространен и на случай взаимодействующих частиц.

з) **Излучение заряженной вращающейся черной дыры. Зависимость излучения от массы, заряда и спина частиц.** В общем случае, когда черная дыра наряду с массой M и угловым моментом J обладает также электрическим зарядом Q , выражение для среднего числа частиц с массой μ , электрическим зарядом $q|e|$ ($q = \pm 1$) и спином s , рождаемых черной дырой, может быть записано в следующем виде [Хоккинг (1975)]:

$$\langle n_J \rangle = \frac{\Gamma_J}{\exp[(2\pi\tilde{\omega}_J)/\kappa] - (-1)^{2s}}. \quad (9.5.55)$$

Здесь коллективный индекс J обозначает полный набор квантовых чисел, задание которого необходимо для описания рассматриваемой моды. Этот набор включает индекс j , нумерующий сорт частиц и содержащий, в частности, информацию о спине частицы s , частоту или энергию ω , сфероидальное квантовое число l , азимутальное квантовое число m , поляризацию или спиральность p и знак заряда частиц q . Величина $\tilde{\omega}_J$ в этом выражении равна

$$\tilde{\omega}_J = \omega_J - m_J \Omega^H - q_J |e| \Phi^H, \quad (9.5.56)$$

где Ω^H и Φ^H — угловая скорость вращения и электрический потенциал черной дыры, а коэффициент $\Gamma_J = 1 - |R_J|^2$, где R_J — коэффициент отражения падающей волны J . Для бозонных полей для суперрадиационных мод коэффициент Γ_J становится отрицательным. Для фермионных полей принцип Паули приводит к тому, что среднее число рассеянных в данной моде частиц не может превосходить единицы, и поэтому всегда $|R_J|^2 \leq 1$. Коэффициент Γ_J положителен, и, следовательно, выражение в правой части (9.5.55) всегда положительно. Явление суперрадиации для ферми-частиц отсутствует [Мартеллини, Тревес (1977), Айер, Кумар (1979), Чандрасекар (1979a, b)].

Обозначим $\sum_J$ суммирование по всем дискретным и интегрирование по непрерывным квантовым числам, входящим в J :

$$\Sigma = \sum_{j, l, m, p, q} \frac{1}{2\pi \mu} \int_{\mu}^{\infty} d\omega; \quad (9.5.57)$$

*) Отметим, что если размеры полости с излучением достаточно велики, то это равновесие; вообще говоря, неустойчивое (подробнее об этом см. § 11.4).

**) Если выполнены условия, гарантирующие отсутствие суперрадиационных мод.

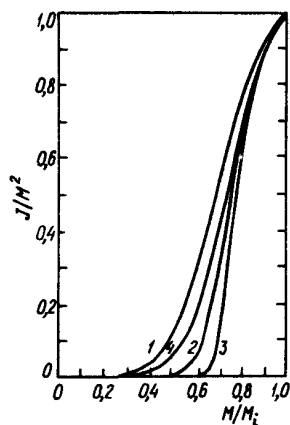
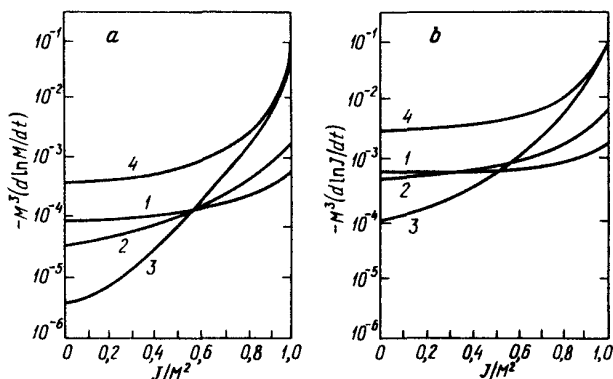


Рис. 76. Изменение параметра вращения J/M^2 черной дыры в процессе ее испарения (M_i — начальная, M — текущая масса черной дыры). На рисунке изображено поведение J/M^2 в зависимости от M/M_i для случаев, когда имеется только одно нейтринное (1), только фотонное (2) или только гравитонное (3) излучение, и для реальной ситуации (4) (четыре сорта нейтрино, один — фотонов и один — гравитонов)

Рис. 77. Мощность излучения энергии (a) и углового момента (b) черной дырой в зависимости от параметра вращения J/M^2 . Отдельно изображены вклады одного сорта нейтрино (1), фотонов (2) и гравитонов (3), а также полная мощность излучения безмассовых частиц в реальной ситуации (4) (четыре сорта нейтрино, один — фотонов и один — гравитонов)



тогда для скорости изменения массы, углового момента и заряда черной дыры в результате ее квантового излучения имеем

$$\begin{aligned}
 -\frac{dM}{dt} &= \sum_J \omega_J \langle n_J \rangle, \\
 -\frac{dJ}{dt} &= \sum_J m_J \langle n_J \rangle, \\
 -\frac{dQ}{dt} &= e \sum_J \text{sign } q_J \langle n_J \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{9.5.58}$$

Задача вычисления вкладов отдельных сортов частиц в квантовое излучение черной дыры сводится к определению соответствующих коэффициентов отражения для волновых функций, описывающих эти частицы. Имеется значительное число работ, посвященных анализу коэффициентов отражения для различных полей в метрике Керра — Ньюмена или ее частных случаях и развитию методов их приближенного описания. Полное изложение относящихся к этой проблеме математических вопросов и обзор полученных

результатов можно найти в книге Чандрасекара (1983), к которой мы и отсылаем читателя. В этом параграфе мы остановимся лишь на некоторых из результатов этого анализа, представляющих особый физический интерес.

1) Потеря заряженной черной дырой электрического заряда анализировалась в работах Маркова, Фролова (1970*), Заумена (1974), Картера (1974), Гиббонса (1975), Накамуры, Сато (1976), Дамура, Руффини (1975), Пэйджа (1977), Руффини (1979), Новикова, Старобинского (1980*). Основным результатом этого анализа состоит в следующем. Черные дыры с массой $M < Ge^2/m \approx 10^{15} \text{ г}$ (m — масса электрона) почти полностью сбрасывает свой электрический заряд практически мгновенно. Для черных дыр с массой $M < \sqrt{G}em_p^2/m^2 \approx 10^5 M_\odot$ время сбрасывания электрического заряда значительно меньше характерного времени испарения черной дыры (см. далее § 12.3 и рис. 85). Таким образом, при анализе процесса испарения черной дыры практически на всем этапе этого испарения можно считать, что черная дыра является нейтральной.

2) Потеря вращающейся черной дырой углового момента, как это вытекает из размерных соображений, вообще говоря, могла бы происходить за времена, сравнимые со временем испарения черной дыры. Картер (1974) высказал предположение, что в процессе испарения отношение углового момента черной дыры к квадрату ее массы стремится к определенному ненулевому значению. Численный счет, выполненный Пэйджем (1976b), показал, что это не так. Если учесть вклад реально существующих безмассовых частиц (нейтрино, фотонов и гравитонов), то угловой момент сбрасывается в несколько раз быстрее, чем масса черной дыры (рис. 76). При этом оказывается, что для медленно вращающихся черных дыр ($J/M^2 \lesssim 0,6$) чем меньше спин безмассовых частиц, тем больший вклад в излучение массы и углового момента они дают (при одинаковом числе состояний поляризации, равном 2). Для быстро вращающихся черных дыр ($J/M^2 \gtrsim 0,6$) ситуация противоположная, и вклад тем больше, чем выше спин частиц (рис. 77). Этот результат находится в соответствии с результатом Старобинского, Чурилова (1973*) относительно зависимости суперрадиации от спина.

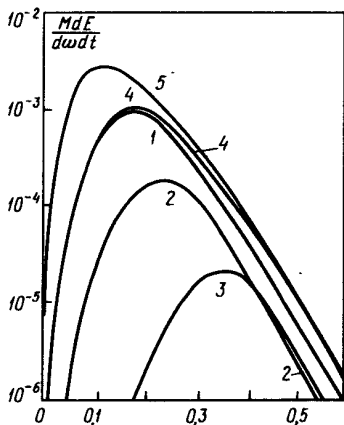


Рис. 78. Спектр мощности излучения черной дыры. Изображены вклады четырех сортов нейтрино (кривая 1), фотонов (2) и гравитонов (3), а также суммарный спектр (кривая 4). Для сравнения приведен спектр излучения этих частиц черным телом с сечением $27\pi M^2$ (кривая 5)

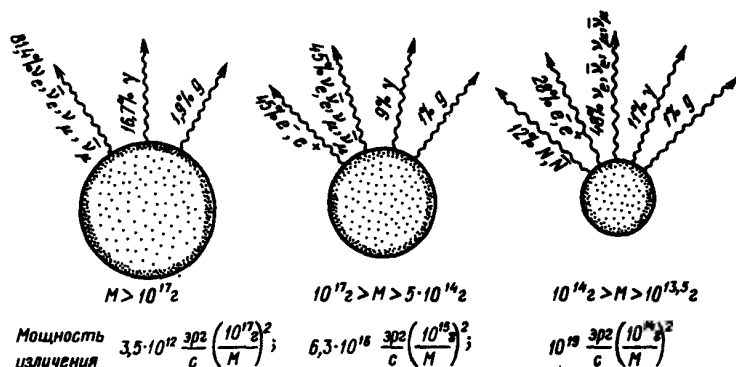


Рис. 79. Квантовый распад неврашающейся черной дыры. В процентах указана доля гравитонов (g), фотонов (γ), нейтрино (ν) и других элементарных частиц в общем числе частиц, излучаемых черными дырами различной массы

Отметим также, что при излучении нейтрино вращающейся черной дырой имеет место асимметрия, проявляющаяся в том, что по направлению вращения излучается больше нейтрино, а против — больше антинейтрино [Унру (1973), Виленкин (1979b), Лихи, Унру (1979)].

3) Излучение неврашающейся черной дыры происходит приблизительно так же, как излучение тела с температурой

$$\theta = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G \kappa M} \approx 10^6 \text{ К} (M/1 \text{ г})^{-1}.$$

Отличие от теплового излучения связано с тем, что коэффициент Γ_J зависит от частоты. При высоких частотах для всех частиц эффективное сечение черной дыры составляет величину $27\pi G^2 M^2/c^4$. Для низких частот сечение уменьшается, причем оно оказывается существенно зависящим от спина:

$$\Gamma_J \sim \omega^{2s+1}, \quad (9.5.59)$$

где $s > 0$ — спин поля. Вклад частиц в общее излучение неврашающейся черной дыры падает с возрастанием спина [Пзидж (1976a)] (рис. 78). Черные дыры с массой $M > 10^{17} \text{ г}$ могут излучать только безмассовые частицы: нейтрино (ν), фотоны (γ) и гравитоны (g). Черные дыры с массой $5 \cdot 10^{14} \text{ г} \leq M \leq 10^{17} \text{ г}$ могут дополнительно излучать электроны и позитроны. Черные дыры с меньшей массой могут излучать более тяжелые элементарные частицы. Распределение продуктов распада черных дыр в разных диапазонах масс представлено на рис. 79.

Скорость потери массы черной дырой в процессе ее испарения описывается следующей формулой:

$$-\frac{dM}{dt} \approx 4 \cdot 10^{-5} \left(\frac{m_{\text{Pl}}}{M} \right)^2 \frac{m_{\text{Pl}}}{t_{\text{Pl}}} f = 7.7 \cdot 10^{24} \left(\frac{M}{1 \text{ г}} \right)^{-2} f \frac{\text{г}}{\text{с}}. \quad (9.5.60)$$

Функция $f = f(M)$ учитывает зависимость dM/dt от числа возможных состояний и сортов частиц, которые дают вклад в излучение черной дыры

с массой M . Вклады безмассовых частиц — нейтрино ($s = 1/2$), фотонов ($s = 1$) и гравитонов ($s = 2$) — в f имеют вид [Пэйдж (1976а, б)]

$$f = 1,023h\left(\frac{1}{2}\right) + 0,420h(1) + 0,048h(2), \quad (9.5.61)$$

где $h(s)$ — число различных поляризаций частиц спина s .

Время жизни черной дыры относительно процесса ее квантового испарения равно

$$t \approx 2,7 \cdot 10^{-26} \text{ с} \int_0^M \frac{M^2 dM}{f(M)} \lesssim 9 \cdot 10^{-27} \text{ с} (M/1 \text{ г})^3. \quad (9.5.62)$$

Это время не превосходит время жизни Вселенной для черных дыр с массой $M < 5 \cdot 10^{14}$ г. Такие черные дыры могли возникать как первичные на ранних этапах эволюции Вселенной (см. § 13.1). Относительно возможности наблюдения квантовых взрывов таких малых черных дыр и продуктов их распада см. обзор Карра (1983) и приведенные в нем ссылки.

4) С помощью внешних воздействий можно влиять на излучение черной дыры и в определенной мере управлять им. Так, при включении внешнего поля мощность и другие характеристики излучения черной дыры изменяются. В частности, при "внесении" черной дыры во внешний гравитационный потенциал интенсивность ее излучения на бесконечности уменьшается в полном соответствии с тем, что уменьшается ее температура, измеренная удаленным наблюдателем [Героч, Хартль (1982), Жук, Фролов (1981*)]. О влиянии магнитного поля на рождение частиц в черных дырах см. Гиббонс (1976), Гальцов (1980*), Соколов и др. (1984*). Интересный пример внешнего воздействия на мощность излучения черной дыры рассмотрен в работе Унру, Уолда (1982) (см. также § 11.3).

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

§ 10.1. Квазиклассическое приближение.

Перенормированный тензор энергии-импульса

Квантовое излучение изолированной черной дыры приводит к уменьшению ее массы, а следовательно, и площади. Чтобы объяснить это "нарушение" теоремы Хокинга, приходится сделать вывод о том, что поток частиц из черной дыры на бесконечность, уносящих положительную энергию, сопровождается потоком через горизонт событий отрицательной энергии внутрь черной дыры. В классической теории при выполнении естественных физических предположений (условий энергодоминантности) это было бы невозможно. В квантовой теории, поскольку действие внешнего поля на вакуум может приводить как к увеличению, так и к уменьшению локальной плотности энергии, возможно появление в части пространства отрицательной плотности энергии и (или) отрицательного давления. Именно это явление, связанное с поляризацией вакуума в сильном гравитационном поле, должно иметь место вблизи черной дыры.

Для описания процесса испарения черной дыры с массой, много большей планковской, можно использовать *квазиклассическое приближение*. Считая, что флуктуации гравитационного поля малы, опишем его с помощью классической метрики

$$g_{\mu\nu} = \langle g_{\mu\nu} \rangle, \quad (10.1.1)$$

удовлетворяющей модифицированным уравнениям Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (10.1.2)$$

в правой части которых стоит среднее от тензора энергии-импульса рассматриваемых квантованных полей в выбранном состоянии. В области пространства-времени, где характерный радиус кривизны L значительно превосходит планковскую длину $l_{Pl} = \sqrt{\hbar G/c^3}$, при вычислении $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ можно использовать разложение по малому параметру $\epsilon = (l_{Pl}/L)^2$ и ограничиться членами до первого порядка по ϵ включительно (квазиклассика). Первый член порядка ϵ^0 совпадает с выражением для тензора энергии-импульса классического поля, в то время как член порядка ϵ^1 , содержащий множитель $\hbar$, дает основной (в рассматриваемом приближении $\epsilon \ll 1$) вклад квантовых эффектов. Этот вклад описывает изменение плотности энергии-импульса в результате действия гравитационного поля на состояние вакуумных виртуальных пар. Следующие по ϵ члены описывают добавки, возникающие при учете дополнительного взаимодействия частиц виртуальной пары, связанного с испусканием и последующим поглощением ими

квантов поля*). В линейном по ϵ ("однопетлевом") приближении виртуальные пары различных полей можно рассматривать как не взаимодействующие. В соответствии с этим вклады в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ всех полей — в линейном по ϵ приближении — складываются аддитивно, и их можно изучать независимо.

Основная проблема при изучении $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ состоит в том, что эта величина расходится. Более точно, всякие расчеты, при которых возникает потребность вычислить среднее значение от величины, содержащей произведение двух и более операторов поля в совпадающих точках ($T_{\mu\nu}$ имеет как раз такой вид), приводят к появлению бесконечностей. Подобные расходимости, возникающие уже в плоском пространстве-времени, связаны с вакуумными нулевыми флуктуациями. Методы выделения конечной, имеющей физический смысл части $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, известные как процедуры перенормировки, широко обсуждались в литературе в связи с развитием общей квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени и с ее конкретными приложениями в космологии и физике черных дыр. Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в работах Де Витта (1965, 1975), Гриба и др. (1980*), Биррела, Левиса (1982), Кристенсена (1976, 1978). Поэтому мы лишь кратко остановимся на процедуре перенормировки $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, а более подробно обсудим те особенности эффекта поляризации вакуума, которые связаны со спецификой черных дыр (в частности, вопрос о выборе вакуумного состояния), и приведем основные результаты вычислений $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$.

К настоящему времени предложен целый ряд методов перенормировки (размерная регуляризация, метод ζ -функции, регуляризация Паули – Вилларса, n -волновая регуляризация, адиабатическая регуляризация, метод раздвигания точек). Важно, однако, что окончательные результаты по существу не зависят от конкретного метода перенормировки. Дело в том, что, как показал Уолд (1977, 1978а, б), всякие методы перенормировки $\langle T_{\mu\nu} \rangle$: 1) сохраняющие общую ковариантность ($\nabla_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}} = 0$), 2) удовлетворяющие естественным требованиям причинности, 3) не изменяющие значения $\langle \Psi | T_{\mu\nu} | \Phi \rangle$ для тех состояний $|\Psi\rangle$ и $|\Phi\rangle$ ($\langle \Psi | \Phi \rangle = 0$), для которых это значение конечно, и 4) согласующиеся с обычной процедурой нормального упорядочения в плоском пространстве-времени, приводят к выражениям для $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$, которые могут отличаться друг от друга лишь на локальный сохраняющийся тензор, построенный из тензора кривизны в рассматриваемой точке и его ковариантных производных.

Поскольку для безмассовых полей отсутствует связанный с полем параметр размерности длины, то в однопетлевом приближении возможный произвол в $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ должен описываться выражением, являющимся суммой членов, квадратичных по кривизне, и членов, линейных по ее вторым производным. Поскольку сконструировать подобный симметричный сохра-

*) При использовании диаграммной техники в квантовой теории для вычисления рассматриваемых средних описанное разложение по $\hbar$ совпадает с разложением по числу замкнутых петель, которые встречаются в соответствующих диаграммах. Члены порядка $\hbar^0$ описываются диаграммами, не содержащими петель ("древесное" приближение), а $\hbar^1$ — диаграммами, содержащими одну петлю ("однопетлевое" приближение).

няющийся тензор второго ранга только из тензора Вейля невозможно, то для безмассовых полей на фоне метрики, удовлетворяющей вакуумным уравнениям Эйнштейна ($R_{\mu\nu} = 0$), указанный выше произвол в определении $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ в однопетлевом приближении отсутствует.

Для классического конформно-инвариантного поля $T_{\mu}^{\mu} = 0$. Важным отличительным свойством $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ является то, что след этой величины для конформно-инвариантного поля уже не обращается в нуль (это явление известно как *конформная аномалия*). Величина $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle^{\text{ren}}$ не зависит от выбора состояния, по которому производится усреднение $T_{\mu\nu}$. Для скалярного конформно-инвариантного ($s = 0$), спинорного двухкомпонентного ($s = 1/2$) безмассовых полей и для электромагнитного поля ($s = 1$) величина $\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle^{\text{ren}}$ записывается в виде *)

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle^{\text{ren}} = a_s \left(C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{2}{3} \square R \right) + b_s (R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 4 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2), \quad (10.1.3)$$

где

$$a_s = \frac{\tilde{a}_s}{5760\pi^2}, \quad b_s = \frac{\tilde{b}_s}{5760\pi^2}, \quad (10.1.4)$$

$$\tilde{a}_0 = 3, \quad \tilde{a}_{1/2} = 9, \quad \tilde{a}_1 = 36,$$

$$\tilde{b}_0 = -1, \quad \tilde{b}_{1/2} = -\frac{11}{2}, \quad \tilde{b}_1 = -62.$$

Для практических вычислений $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ в гравитационном поле черных дыр наиболее часто используют метод раздвижения точек. Он состоит в следующем. Поскольку $T_{\mu\nu}$ билинейно зависит от поля, можно формально ввести обобщение величины $T_{\mu\nu}$ на случай, когда аргументы у каждого из полей отличны друг от друга ("раздвинуть точки"). В классической теории $T_{\mu\nu}(x)$ возникает как предел соответствующего выражения $T_{\mu\nu}'(x, x')$ при $x' = x$. В квантовой теории при вычислении среднего значения оператора $\hat{T}_{\mu\nu}'(x, x')$ в рассматриваемом состоянии $T_{\mu\nu}'(x, x') = \langle \hat{T}_{\mu\nu}'(x, x') \rangle$ простой переход к пределу $x' \rightarrow x$ невозможен из-за возникновения расходимости. Поэтому до перехода к пределу "подправляют" (перенормируют) величину $T_{\mu\nu}'(x, x')$, вычитая из нее некоторое стандартное выражение $T_{\mu\nu}^{\text{div}}(x, x')$. Для каждого из полей вычисление $T_{\mu\nu}^{\text{div}}$ достаточно провести

*) Приведенные значения коэффициентов a_s и b_s получены Даффом (1977) методом размерной регуляризации. При использовании других методов в случае электромагнитного поля возможно появление дополнительных членов вида $\square R$. Заметим, что в метриках, удовлетворяющих вакуумным уравнениям Эйнштейна ($R_{\mu\nu} = 0$), эта неоднозначность отсутствует, и мы имеем

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle^{\text{ren}} = (a_s + b_s) C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Значения коэффициентов a_s и b_s для четырехкомпонентного безмассового фермионного поля вдвое больше приведенных в (10.1.4).

один раз. Соответствующие выражения для $T_{\mu\nu}^{\text{div}}$ в случае скалярного, спинорного безмассовых полей и электромагнитного поля получены Кристенсеном (1978).

При вычислении матричных элементов $\langle \Psi | T_{\mu\nu}(x) | \Phi \rangle^{\text{ren}}$ тензора энергии-импульса поля φ_A для выбранных состояний $|\Phi\rangle$ и $|\Psi\rangle$ удобно использовать функцию Грина

$$G_{AB'}(x, x') = i \frac{\langle \Psi | T(\hat{\varphi}_A(x) \hat{\varphi}_{B'}(x')) | \Phi \rangle}{\langle \Psi | \Phi \rangle}. \quad (10.1.5)$$

Здесь символ T обозначает операцию T -произведения

$$T(\hat{\varphi}_A(x) \hat{\varphi}_{B'}(x')) = \theta(x, x') \hat{\varphi}_A(x) \hat{\varphi}_{B'}(x') + \theta(x', x) \hat{\varphi}_{B'}(x') \hat{\varphi}_A(x), \quad (10.1.6)$$

где $\theta(x, x')$ — ступенчатая функция, равная 1, если x лежит в будущем по отношению к x' , и равная 0 в противном случае. Нетрудно убедиться, используя коммутационные соотношения (9.2.5), что функция Грина (10.1.5) для поля φ_A , описываемого уравнением (9.2.2), удовлетворяет следующему уравнению:

$$D^A C_{GB'}(x, x') = -\delta_B^A \delta^4(x - x'), \quad (10.1.7)$$

где $\int \delta^4(x - x') d^4x = 1$. С этой функцией Грина связана так называемая *функция Адамара* *)

$$G_{AB'}^{(1)}(x, x') = \frac{\langle \Phi | \hat{\varphi}_A(x) \hat{\varphi}_{B'}(x') + \hat{\varphi}_{B'}(x') \varphi_A(x) | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle}. \quad (10.1.8)$$

Значение тензора энергии-импульса в раздвинутых точках записывается в виде

$$T_{\mu\nu'}(x, x') = \frac{1}{2} T_{\mu\nu'}^{AB'}(x, x') G_{AB'}^{(1)}(x, x'), \quad (10.1.9)$$

где $T_{\mu\nu'}^{AB'}(x, x')$ — дифференциальный оператор по переменным x и x' такой, что для классического поля $\varphi_A(x)$ величина $T_{\mu\nu'}^{AB'}(x, x) \varphi_A(x) \varphi_{B'}(x)$ совпадает с $T_{\mu\nu'}(x)$. Явный вид операторов $T_{\mu\nu'}^{AB'}$ для полей различных спинов приведен в работе Кристенсена (1978).

Часто наряду с $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ рассматривают величины вида $\langle \varphi_A^2 \rangle^{\text{ren}}$, описывающие флуктуации поля φ_A . В случае скалярного поля φ величина $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ в поле черных дыр исследовалась в связи с вопросом о возможности фазовых переходов вблизи них. Эти переходы состоят в появлении $\langle \varphi(x) \rangle \neq 0$ [Хокинг (1981), Фосетт, Уайтинг (1982), Мосс (1984)]. В гравитационном поле, описываемом вакуумными уравнениями Эйнштейна, для перенормированного значения $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ имеет место следующее простое выражение:

$$\langle \varphi^2(x) \rangle^{\text{ren}} = \lim_{x' \rightarrow x} \left[-iG(x, x') - \frac{1}{8\pi^2 \sigma(x, x')} \right], \quad (10.1.10)$$

*) Если точки x и x' разделены пространственноподобным расстоянием, то $\hat{\varphi}_A(x)$ и $\hat{\varphi}_{B'}(x')$ коммутируют и $G_{AB'}^{(1)}(x, x') = -2iG_{AB'}(x, x')$.

где $\sigma(x, x') = \frac{1}{2} s^2(x, x')$, $s(x, x')$ — интервал геодезического расстояния между x и x' , а стремление x' к x происходит вдоль пространственноподобного направления.

Таким образом, задача вычисления величин $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$, несущих информацию о плотности энергии-импульса (связанной с поляризацией вакуума) и вакуумных флуктуациях, сводится к выполнению набора стандартных операций над функцией Грина (10.1.5). Тем самым решение задачи о поляризации вакуума в черных дырах сводится к получению решения уравнения (10.1.7) в заданной метрике, описывающей пространство-время черной дыры. При этом произволу в выборе состояния, по которому производится усреднение в (10.1.5), отвечает произвол в выборе граничных условий, однозначно фиксирующих ту или иную функцию Грина.

§ 10.2. Выбор состояний и граничные условия для функций Грина

Опишем теперь те состояния и отвечающие им граничные условия для функций Грина, которые наиболее часто фигурируют при рассмотрении квантовых эффектов в черных дырах*). Для простоты ограничимся рассмотрением скалярного безмассового поля.

Очевидный интерес представляет случай, когда черная дыра возникает в результате коллапса, а до ее образования квантовая система находилась в основном, вакуумном состоянии. Соответствующая функция Грина

$$G_{\text{in}}(x, x') = i \langle 0; \text{in} | T(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')) | 0; \text{in} \rangle, \quad (10.2.1)$$

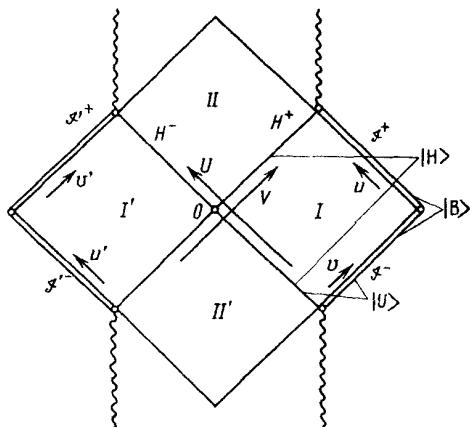
являясь, как и все остальные функции Грина (10.1.5), симметричной, однозначно определяется тем свойством, что она в отдаленном прошлом (в ин-области) совпадает со свободной причинной функцией Грина в пространстве Минковского. Очевидно, что поведение G_{in} зависит, вообще говоря, от деталей коллапса, приводящего к образованию черной дыры. Это делает задачу нахождения G_{in} сложной и трудно поддающейся решению. Напомним, однако, что с течением времени черная дыра становится стационарной**). На основании тех же аргументов, которые использовались при доказательстве универсальности свойств хоккингского излучения в поздние времена, можно прийти к выводу, что G_{in} через достаточно большое время после возникновения черной дыры определяется лишь ее параметрами.

Для описания свойств этой "универсальной" функции Грина удобно использовать следующий прием. Рассмотрим пространство-время вечной черной дыры, обладающей теми же параметрами, что и возникающая стационарная черная дыра. Определим в ней функцию Грина $G_U(x, x')$ как реше-

*) Общий анализ проблемы определения вакуума в пространстве-времени при наличии горизонтов можно найти в работах Фуллинга (1977a, b), Шьяма и др. (1981).

**) Точнее, почти стационарной, поскольку в результате квантового испарения ее параметры все же меняются. Однако, как уже отмечалось, скорость этого изменения пренебрежимо мала до тех пор, пока масса черной дыры значительно превосходит планковскую.

Рис. 80. Диаграмма Пенроуза для вращающейся черной дыры. Стрелками указаны поверхности, ограничивающие область I, на которых задаются граничные условия для функций Грина, отвечающих вакуумным состояниям Хартля – Хокинга ($|H\rangle$), Унру ($|U\rangle$) и Бульвара ($|B\rangle$)



ние уравнения (10.1.7), совпадающее при поздних временах с асимптотической $G_{in}(x, x')$, а в остальном пространстве-времени получаемую как ее аналитическое продолжение. Унру (1976b) показал, что в пространстве-времени вечной черной дыры для значений аргументов x, x' , лежащих во внешней области или на горизонте событий, функция Грина $G_U(x, x')$ однозначно определяется следующими граничными условиями: при фиксированном значении x' в области I (рис. 80) эта функция является отрицательно-частотной по отношению к аффинному параметру U на H^- для x на H^- и отрицательно-частотной по опережающему времени v на $\mathcal{I}^-$ для x на $\mathcal{I}^-$. Соответствующее состояние $|U\rangle$, для которого

$$G_U(x, x') = i \langle U | T(\hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x')) | U \rangle, \quad (10.2.2)$$

получило название *вакуума Унру*.

Представляет интерес другой случай, когда черная дыра помещена в полость с чернотельным излучением и находится в равновесии с последним. Поскольку это состояние не является чистым и описывается матрицей плотности $\hat{\rho}_\theta$ (9.5.45), то для соответствующей ему функции Грина $G_H(x, x')$ имеем

$$G_H(x, x') = i \text{Sp} [\hat{\rho}_\theta T(\hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x'))]. \quad (10.2.3)$$

Эту функцию Грина также можно аналитическим продолжением распространить на все пространство-время вечной черной дыры. При этом, как показали Хартль и Хокинг (1976), она удовлетворяет следующим граничным условиям: при фиксированном значении x' она является отрицательно-частотной функцией по отношению к аффинному параметру U для x на H^- и положительно-частотной функцией по отношению к аффинному параметру V для x на H^+ (см. рис. 80). Хотя это состояние не является ни чистым, ни вакуумным, для его обозначения используют символ $|H\rangle$, сокращенно записывая (10.2.3) в виде

$$G_H(x, x') = i \langle H | T(\hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x')) | H \rangle, \quad (10.2.4)$$

и называют *вакуумом Хартля – Хокинга*.

Если черная дыра вращается, то, как отмечалось в предыдущей главе, равновесная ситуация оказывается возможной только в случае, когда размер полости, внутри которой заключена черная дыра, достаточно мал. При этом, вообще говоря, оказывается важным выбор граничных условий для поля φ на поверхности полости Σ . Обычно мы будем полагать, что

$$\varphi|_{\Sigma} = 0. \quad (10.2.5)$$

Соответствующему граничному условию должна удовлетворять и функция Грина

$$G_H(x, x')|_{x \in \Sigma} = 0. \quad (10.2.6)$$

В том случае, когда роль ограничивающей поверхности Σ важна, вместо $|H\rangle$ будем использовать обозначение $|H, \Sigma\rangle$, а вместо $G_H - G_{H, \Sigma}$.

Как показали Хартль и Хокинг (1976), функция Грина (так же, как и $G_{H, \Sigma}$) обладает особыми аналитическими свойствами. Чтобы описать эти свойства, заметим, что если в выражении для элемента длины (4.2.1) в геометрии Керра произвести замену

$$t = -i\tau, \quad a = ib, \quad (10.2.7)$$

то возникающая метрика будет иметь сигнатуру $++++$. Более того, оказывается [Хартль, Хокинг (1976), Хокинг (1981)], что эта метрика является всюду регулярной (включая и поверхность $r = r_E = M + \sqrt{M^2 + b^2}$, отвечающую аналитическому продолжению поверхности горизонта событий), если только координата τ — циклическая с периодом, равным $2\pi/\kappa_E$ ($\kappa_E = \kappa|_{a=ib}$). Регулярное пространство, обладающее подобной метрикой, получило название *евклидовой черной дыры*. Результат, полученный Хартлем и Хокингом (1976), состоит в том, что функция Грина $G_E(x, x')$, возникающая при аналитическом продолжении (10.2.7) функции $G_H(x, x')$:

$$G_H(x, x') = [iG_E(x, x')]_{\substack{\tau = i\tau \\ b = ia}}, \quad (10.2.8)$$

является симметричным решением уравнения

$$\square_E G_E(x, x') = -\frac{\delta(x, x')}{\sqrt{g_E}} \quad (10.2.9)$$

в пространстве евклидовой черной дыры, убывающим на бесконечности и регулярным на поверхности евклидова горизонта. (Здесь $\square_E = \square|_{\substack{\tau = -i\tau \\ a = ib}}$)

$g_E = g|_{\substack{\tau = -i\tau \\ a = ib}}$. Этот результат позволяет использовать для построения

$G_H(x, x')$ следующий прием: сначала находят евклидову функцию Грина G_E , а затем с помощью аналитического продолжения (10.2.8) получают G_H . Этот прием, во многом аналогичный процедуре виковского поворота и перехода к евклидовой формулировке, используемой в квантовой теории поля в плоском пространстве-времени, часто позволяет существенно облегчить задачу вычисления G_H .

Обсудим кратко еще один, используемый при описании квантовых эффектов в черных дырах выбор состояния, предложенный Бульваром (1975a, b, 1976). Это состояние, обозначаемое $|B\rangle$, получило название *вакуума Бульвара*. Рассмотрим ситуацию, когда имеется невращающееся сферическое тело массы M с радиусом R_0 , слегка превышающим гравитационный радиус r_g этого тела. Поскольку в таком статическом пространстве-времени соответствующее векторное поле Киллинга $\xi_{(t)}^\mu \partial_\mu = \partial_t$ везде времениподобно, то любые частицы обладают положительной энергией и рождение частиц невозможно. Соответствующее вакуумное состояние $|B; R_0\rangle$ является устойчивым, а отвечающая ему функция Грина $G_{B; R_0}(x, x')$ удовлетворяет следующим граничным условиям: при фиксированном значении x' она является отрицательно-частотной функцией v при x на $\mathcal{U}^-$ и положительно-частотной функцией u при x на $\mathcal{U}^+$. Определим функцию Грина

$$G_B(x, x') = i \langle B | T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x')) | B \rangle \quad (10.2.10)$$

как решение уравнения $\square G_B(x, x') = -\delta(x, x')/\sqrt{-g}$ в пространстве-времени вечной черной дыры, удовлетворяющее приведенным выше граничным условиям.

Для невращающейся черной дыры функцию Грина G_B можно рассматривать в некотором смысле как предел $G_{B; R_0}$ при $R_0 \rightarrow r_g$. Очевидно, что физическая реализация статической системы, размер которой сколь угодно близок к гравитационному радиусу, не представляется возможной. Частицы поверхности такого тела в этом пределе должны обладать бесконечно большим ускорением и требуют для их удержания бесконечно больших сил. В соответствии с этим функция Грина G_B , имеющая простое регулярное поведение вдали от черной дыры и отвечающая отсутствию квантового излучения на $\mathcal{U}^+$, имеет "плохое" аналитическое поведение вблизи горизонта событий, а отвечающие ей перенормированные значения $\langle B | T_{\mu\nu} | B \rangle$ и $\langle B | \varphi^2 | B \rangle$ расходятся на H^+ и H^- .

Хотя описанные выше состояние и функции Грина были определены лишь для скалярного безмассового поля, распространение этих определений на общий случай не представляет затруднений.

§ 10.3. $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ в пространстве-времени черной дыры

Для вычисления перенормированного значения тензора энергии – импульса требуется знание функции Грина $G(x, x')$ при значениях ее аргументов x и x' , близких друг к другу. Это, однако, еще ни в коей мере не означает, что граничные условия, налагаемые на функцию Грина вдали от интересующей нас точки, не влияют на поведение $G(x, x')$ в пределе совпадающих точек *). Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что функция Грина определяется уравнением с точностью до решения однородного уравнения, которое однозначно фиксируется как раз граничными условиями.

*) Заметим, что в римановом пространстве для метрики с евклидовой сигнатурой функция Грина массивного поля экспоненциально быстро спадает с увеличением расстояния между точками x и x' . Если эти точки находятся далеко от границы, то влияние граничных условий для этих полей действительно пренебрежимо мало.

В теории массивного (с массой m) поля, когда характерный радиус кривизны пространства-времени L значительно превосходит комптоновскую длину $\lambda = \hbar/mc$, можно использовать разложение по малому параметру $\epsilon = (\lambda/L)^2$, чтобы получить равномерное приближение для функции Грина. В случае безмассового поля такой параметр отсутствует. Поскольку волновые уравнения для безмассовых полей в метрике Керра допускают разделение переменных, то естественный метод изучения функций Грина для таких полей состоит в представлении их в виде разложений по собственным модам [Канделас(1980), Канделас и др. (1981)].

Приведем в качестве примера представление для функций Адамара скалярного безмассового поля в метрике вращающейся черной дыры*). Удобно в качестве базисных решений уравнения $\square\varphi = 0$ в пространстве-времени вечной черной дыры выбрать систему решений $v_{\omega lm}, y_{\omega lm}$, удовлетворяющих следующим граничным условиям. Функции $v_{\omega lm}$ обращаются в нуль на H^- , а на $\mathcal{I}^-$ имеют образ $V_{\omega lm}$, описываемый выражением (9.4.5). Образ $y_{\omega lm}$ на $\mathcal{I}^-$ равен нулю, а на H^- эти функции принимают значения

$$y_{\omega lm}|_{H^-} = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{4\pi\tilde{\omega}(r_+^2 + a^2)}} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (10.3.1)$$

В случае, если черная дыра окружена зеркальной оболочкой, уравнение которой $r = r_0$ ($\varphi|_{r_0} = 0$), в качестве соответствующих базисных функций выбирают решения $k_{\omega lm}$, которые на H^- имеют значения, совпадающие с $v_{\omega lm}|_{H^-}$ [формула (10.3.1)], а на оболочке обращаются в нуль: $k_{\omega lm}|_{r_0} = 0$. Если коллективный индекс ωlm обозначить через J и ввести обозначения

$$\begin{aligned} v_J(x, x') &= v_J(x) \bar{v}_J(x') + \bar{v}_J(x) v_J(x'), \\ y_J(x, x') &= y_J(x) \bar{y}_J(x') + \bar{y}_J(x) y_J(x'), \\ k_J(x, x') &= k_J(x) \bar{k}_J(x') + \bar{k}_J(x) k_J(x'), \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

то функции Адамара $G^{(1)}$, отвечающие различным выборам "вакуумных" состояний, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} G_U^{(1)}(x, x') &= \sum_{l, m} \left[\int_0^\infty d\omega v_J(x, x') + \int_{\Omega m}^\infty d\omega \operatorname{cth} \frac{\pi\tilde{\omega}}{\kappa} y_J(x, x') \right], \\ G_H^{(1)}(x, x') &= \\ &= \sum_{l, m} \left[\int_0^\infty d\omega \operatorname{cth} \frac{\pi\tilde{\omega}}{\kappa} v_J(x, x') + \int_{\Omega m}^\infty d\omega \operatorname{cth} \frac{\pi\tilde{\omega}}{\kappa} y_J(x, x') \right], \\ G_B^{(1)}(x, x') &= \sum_{l, m} \left[\int_0^\infty d\omega v_J(x, x') + \int_{\Omega m}^\infty d\omega y_J(x, x') \right], \\ G_{H; r_0}^{(1)}(x, x') &= \sum_{l, m} \int_{\Omega m}^\infty d\omega \operatorname{cth} \frac{\pi\tilde{\omega}}{\kappa} k_J(x, x'). \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

Аналогичные представления для функций Грина для электромагнитного поля и гравитационных возмущений приведены в работе Канделаса и др. (1981); относительно функций Грина скалярного поля см. также Канделас (1980), Фролов (1986*).

*) Приводимые ниже формулы справедливы и для заряженной черной дыры.

Заметим, что поскольку расходимости, удаляемые в процессе перенормировки, имеют универсальный вид, значение разностей любой пары функций (10.3.3) в пределе совпадающих точек остается конечным. Для этих конечных разностей имеем, в частности,

$$\langle U | \varphi^2(x) | U \rangle - \langle H | \varphi^2(x) | H \rangle = -2 \sum_{l,m} \int_0^\infty \frac{d\omega |v_J(x)|^2}{e^{\tilde{\omega}/\theta} - 1}, \quad (10.3.4)$$

$$\begin{aligned} & \langle B | \varphi^2(x) | B \rangle - \langle H | \varphi^2(x) | H \rangle = \\ & = -2 \sum_{l,m} \left[\int_0^\infty \frac{d\omega |v_J(x)|^2}{e^{\tilde{\omega}/\theta} - 1} + \int_{\Omega m}^\infty \frac{d\omega |y_J(x)|^2}{e^{\tilde{\omega}/\theta} - 1} \right], \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

где $\theta = \kappa/2\pi$ — температура черной дыры.

Представления вида (10.3.3) для функций Грина позволяют проанализировать поведение $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle^{\text{ren}}$ вблизи $H^\pm$ и $J^\pm$. В частности, можно показать, что значения этих величин вблизи $H^\pm$ при усреднении по вакууму Бульвара расходятся. Их асимптотики вблизи шварцшильдовской черной дыры в координатах t, r, θ, φ имеют вид [Канделас (1980), Канделас и др. (1981), Шьяма и др. (1981)] *)

$$\langle \varphi^2(r) \rangle_B \sim (r - r_g)^{-1}, \quad (10.3.6)$$

$$\begin{aligned} & \langle T_\nu^\mu(r) \rangle_B \sim \frac{h_s}{2\pi^2(1 - r_g/r)^2} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{d\omega(\omega^2 + s^2\kappa^2)}{e^{\omega/\theta} - (-1)^{2s}} \text{diag} \left(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned} \quad (10.3.7)$$

Здесь и далее $\text{diag}(a, b, c, d)$ обозначает диагональную матрицу с элементами, равными a, b, c и d на диагонали, а h_s — число поляризаций поля спина s .

Причина подобного сингулярного поведения величин, характеризующих поляризацию вакуума в этом состоянии, состоит в том, что само состояние отвечает, как это отмечалось выше, физически нереализуемой ситуации.

К сожалению, просуммировать ряды, отвечающие $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ и получаемые после перенормировки из соответствующих рядов вида (10.3.3) для функций Грина, и найти явные конечные выражения для этих величин в общем случае не удастся **). Поэтому для получения результатов либо используют машинные методы, либо развивают методы приближенного суммирования рядов. В выполненных к настоящему времени работах ограничивались рассмотрением случая, когда черная дыра не вращается.

Прежде чем перейти к изложению результатов этих работ, отметим, что свойства симметрии $\langle T_\nu^\mu \rangle$, связанные с симметриями фонового шварцшиль-

*) В этих формулах (и далее) мы опускаем индекс "ren" у величин $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle^{\text{ren}}$, поскольку будем иметь дело лишь с перенормированными значениями этих величин. Нижний символ, стоящий у скобок, указывает на то вакуумное состояние, по которому производится усреднение. Так, $\langle \varphi^2 \rangle_B$ обозначает $\langle B | \varphi^2 | B \rangle^{\text{ren}}$.

**) К числу важных исключений, для которых возможно получение точных значений $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$, относятся случаи, когда рассматриваемая точка лежит на горизонте событий. На этих случаях мы остановимся ниже.

довского гравитационного поля, и закон сохранения $\langle T^\mu_\nu \rangle_{;\mu}$, которому эта величина удовлетворяет, резко ограничивают число ее независимых компонент. А именно, как показали Кристенсен и Фуллинг (1977), всякий сохраняющийся $\langle T^\mu_\nu \rangle$ в пространстве-времени невращающейся черной дыры допускает следующее представление:

$$\langle T^\mu_\nu \rangle = \sum_{i=1}^4 t^\mu_{\nu i}, \quad (10.3.8)$$

где $t^\mu_{\nu i}$ в координатах t, r^*, θ, φ имеют вид

$$t^\mu_{\nu 1} = \text{diag} \left(-\frac{FH}{r^2}, \frac{1}{2} T, \frac{FH}{r^2}, \frac{1}{4} T, \frac{1}{4} T \right),$$

$$t^\mu_{\nu 2} = \text{diag} \left(-\frac{FG}{r^2} - 2\Theta, \frac{FG}{r^2}, \Theta, \Theta \right), \quad (10.3.9)$$

$$t^\mu_{\nu 3} = \frac{W}{4\pi r^2} F \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^\mu_{\nu 4} = \text{diag} \left(\frac{-N}{r^2} F, \frac{N}{r^2} F, 0, 0 \right),$$

а

$$F = (1 - 2M/r)^{-1},$$

$$T(r) = \langle T^\mu_\mu(r) \rangle, \quad \Theta(r) = \langle T^\theta_\theta(r) \rangle - \frac{1}{4} T(r), \quad (10.3.10)$$

$$H(r) = \frac{1}{2} \int_{2M}^r (r' - M) T(r') dr', \quad G(r) = 2 \int_{2M}^r (r' - 3M) \Theta(r') dr'.$$

Каждый из тензоров $t^\mu_{\nu i}$ удовлетворяет закону сохранения $t^\mu_{\nu i};_\mu = 0$.

Только $t^\mu_{\nu 1}$ имеет ненулевой след, только $t^\mu_{\nu 2}$ имеет бесследовую часть

$t^\mu_{\nu} - \frac{1}{4} T \delta^\mu_\nu$, у которой $\theta\theta$ -компонента отлична от нуля, только $t^\mu_{\nu 3}$ имеет недиагональные компоненты, описывающие потоки, и только $t^\mu_{\nu 4}$ не регулярен на H^+ .

Иными словами, произвольный тензор энергии-импульса, удовлетворяющий закону сохранения и условиям симметрии, присущим метрике Шварц-

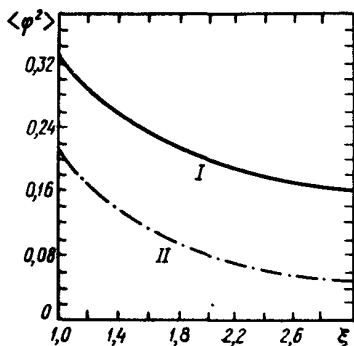


Рис. 81. Значения $(8\pi M)^2 \langle \varphi^2 \rangle$ в зависимости от $\xi = r/M - 1$: кривая I — $\langle \varphi^2 \rangle_H$, кривая II — $\langle \varphi^2 \rangle_U$

шильда, однозначно характеризуется заданием двух функций T и Θ от r (одна из которых (T) совпадает с его следом) и двух констант W и N , значения одной из которых (W) совпадает с интенсивностью излучения черной дыры на бесконечности ($W = -dM/dr$), а значение второй равно нулю ($N = 0$), если тензор энергии-импульса регулярен на H^+ .

Интенсивность излучения W отлична от нуля лишь для вакуума Унру; при этом для безмассового скалярного ($s = 0$), двухкомпонентного нейтринного ($s = 1/2$), электромагнитного ($s = 1$) и гравитационного ($s = 2$) полей коэффициенты W соответственно равны [Пэйдж (1982), Эльстер (1983b)]

$$W_0 = 7,4 \cdot 10^{-5} M^{-2}, \quad W_{1/2} = 8,2 \cdot 10^{-5} M^{-2}, \quad (10.3.11)$$

$$W_1 = 3,3 \cdot 10^{-5} M^{-2}, \quad W_2 = 0,4 \cdot 10^{-5} M^{-2}.$$

Коэффициент N обращается в нуль для вакуума Унру и для вакуума Хартля—Хокинга.

Выполненные к настоящему времени численные расчеты относятся к случаю скалярного безмассового поля в пространстве-времени шварцшильдовской черной дыры. Результаты вычислений $\langle \varphi^2 \rangle_H$ и $\langle \varphi^2 \rangle_U$, выполненных Фосеттом и Уайтингом (1982), приведены на рис. 81. Значения компонент $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_H$ были вычислены Ховардом, Канделасом (1984) и Ховардом (1984), которые обнаружили и исправили ошибку в предыдущих вычислениях Фосетта (1983). Значения отличных от нуля компонент $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_H$ и вычисленные Эльстером (1983b) значения $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_U$ приведены на рис. 82.

Основная особенность тензора $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle_H$ — конечность его компонент на горизонте событий. В частности, наблюдатель, покоящийся в точке r вблизи горизонта событий, зарегистрирует плотность энергии $-\langle T_t^t \rangle_H$, и это значение остается конечным при $r \rightarrow r_g$. С другой стороны, измеренная им тем-

пература окажется равной $T_{loc} = \frac{\kappa}{2\pi} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}$. Подобное измерение

температуры можно, например, "осуществить", взяв в качестве термометра двухуровневую систему, переходы между уровнями в которой связаны с поглощением и испусканием квантов рассматриваемого поля (фотонов). По прошествии достаточно длительного времени вероятность нахождения системы на верхнем уровне будет в $\exp(\Delta E/T_{loc})$ раз меньше, чем на нижнем (ΔE — разница энергий между уровнями). Аналогичным образом ведут себя другие детекторы малых размеров [Унру (1976b)]. Нетрудно убедиться, что вблизи r_g $T_{loc} \approx T_a = a/2\pi$, где a — ускорение наблюдателя, и при $r \rightarrow r_g$ $T_{loc} \rightarrow \infty$ *).

* Аналогичным образом ускоренный (с ускорением a) наблюдатель в плоском пространстве-времени также зарегистрирует с помощью описанных "термометров" температуру $T_a = a/2\pi$. Поэтому с точки зрения такого наблюдателя обычный вакуум Минковского в известной мере ведет себя так же, как тепловое излучение с температурой T_a . Следует отметить, что, регистрируя энергию этих тепловых "частиц", он не может с достаточной степенью точности измерить их импульс, поскольку характерная длина волны этого "излучения" порядка расстояния до горизонта. Это же замечание справедливо и для "частиц" теплового излучения, регистрируемых наблюдателем вблизи черной дыры. Подробно об этом см. Унру (1976b), Унру, Уолд (1984).

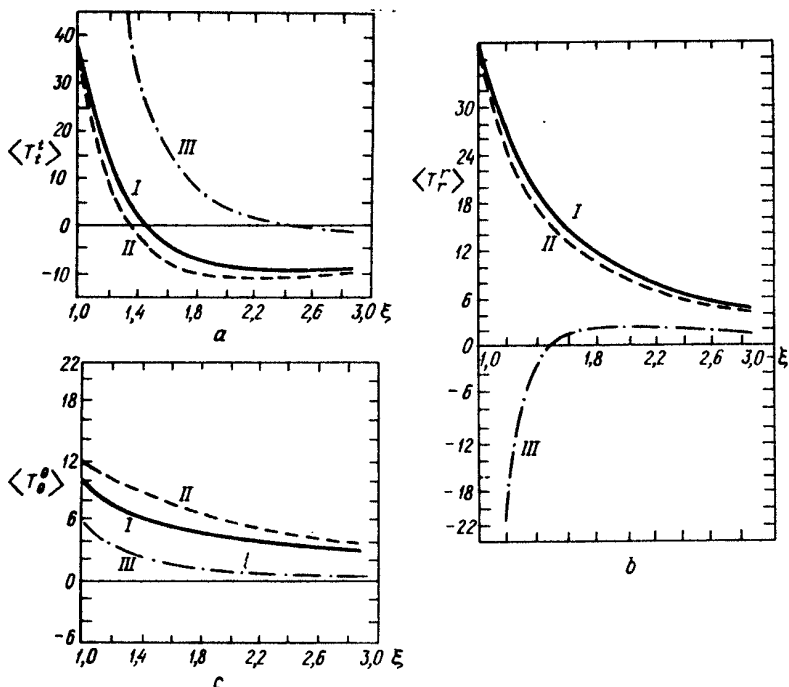


Рис. 82. Значения компонент $[90(8\pi M)^4/\pi^2] \langle T_\nu^\mu \rangle$ в зависимости от ξ . На рисунках представлено поведение $\langle T_t^t \rangle$ (а), $\langle T_r^r \rangle$ (б) и $\langle T_\theta^\theta \rangle = \langle T_\varphi^\varphi \rangle$ (с) компонент тензора энергии-импульса. Компоненты $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ — кривые I, $\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P$ — кривые II, а $\langle T_\nu^\mu \rangle_U$ — кривые III

Отметим, однако, что, как следует из приведенных на рис. 82 результатов, плотность энергии излучения в окрестности такой точки $\sim \sigma(\kappa/2\pi)^4 \ll \sigma T_a^4$. Причина "нарушения" закона σT^4 состоит в том, что он не справедлив вблизи границ, где параметры системы сильно изменяются на расстоянии порядка характерной длины волны излучения. В случае черной дыры именно такая ситуация имеет место вблизи ее поверхности (на расстоянии $r - r_g \sim r_g$). Тот факт, что величина $-\langle T_t^t \rangle_H$ (в отличие от σT_a^4) конечна на горизонте, можно интерпретировать следующим образом: вклад поляризации вакуума, связанной с неоднородностью пространства-времени вблизи горизонта, в точности компенсирует ту расходимость, которая имела бы место для плотности энергии излучения, если выполнялся бы закон σT_a^4 .

Фосетт и Уайтинг (1982), анализируя результаты вычислений, обратили внимание на то, что значения величины $\langle \varphi^2 \rangle_H$ на всем интервале от r_g до ∞ хорошо аппроксимируются простым выражением

$$\langle \varphi^2 \rangle_H = \frac{1}{768\pi^2 M^2} \frac{1 - z^4}{1 - z}, \quad (10.3.12)$$

где $z = 2M/r$. Исходя из этого, Пэйдж (1982) предложил метод приближенного вычисления $\langle \varphi^2 \rangle_H$ и $\langle T^\mu_\nu \rangle_H$. Для $\langle \varphi^2 \rangle_H$ получаемое в приближении Пэйджа значение $\langle \varphi^2 \rangle_H^P$ совпадает с (10.3.12). Канделас, Ховард (1984), Ховард, Канделас (1984), Ховард (1984) показали, что вычисляемые в рамках приближения Пэйджа величины $\langle \varphi^2 \rangle_H^P$ и $\langle T^\mu_\nu \rangle_H^P$ весьма точно воспроизводят истинное поведение $\langle \varphi^2 \rangle_H$ и $\langle T^\mu_\nu \rangle_H$ (для $\langle \varphi^2 \rangle_H^P$ отличие от истинного значения $\langle \varphi^2 \rangle_H$ не превышает 1%, для компонент $\langle T^\mu_\nu \rangle_H^P$ это отклонение не превосходит 20%).

Исходными для построения приближения Пэйджа являются два положения:

1) Пусть имеются два конформных пространства и пусть в каждом из них производится вычисление перенормированных средних $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T^\mu_\nu \rangle$ для состояний, получаемых друг из друга с помощью того же конформного преобразования. Тогда следующие комбинации, содержащие $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T^\mu_\nu \rangle$, являются инвариантными (т.е. не зависят от того, в каком из конформных пространств они вычислены):

$$Z = g^{1/4} \left[\langle \varphi^2 \rangle + \frac{1}{288\pi^2} R \right], \quad (10.3.13)$$

$$J^\mu_\nu = g^{1/2} \left\{ \langle T^\mu_\nu \rangle + \alpha_s \left[(C^{\alpha\mu}_{\beta\nu} \ln g)_{;\alpha}{}^{;\beta} + \frac{1}{2} R^\beta_\alpha C^{\alpha\mu}_{\beta\nu} \ln g \right] + \right. \\ \left. + \beta_s [2H^\mu_\nu - 4R^\beta_\alpha C^{\alpha\mu}_{\beta\nu}] + \frac{1}{6} \gamma_s I^\mu_\nu \right\}, \quad (10.3.14)$$

где

$$H_{\mu\nu} = -R^\alpha_\mu R_{\alpha\nu} + \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2} R^\alpha_\beta R^\beta_\alpha - \frac{1}{4} R^2 \right) g_{\mu\nu}, \quad (10.3.15)$$

$$I_{\mu\nu} = 2R_{;\mu\nu} - 2R R_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{2} R^2 - 2R_{;\alpha}{}^{;\alpha} \right) g_{\mu\nu},$$

$C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Вейля (П.4), $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи (П.3), R — скалярная кривизна, а коэффициенты α_s , β_s и γ_s связаны с коэффициентами a_s и b_s , входящими в выражение для конформных аномалий (10.1.3), соотношениями

$$\alpha_s = a_s, \quad \beta_s = b_s, \quad \gamma_s = \frac{2}{3} a_s. \quad (10.3.16)$$

2) Пусть метрика

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + h_{ij} dx^i dx^j \quad (10.3.17)$$

является статическим решением вакуумных уравнений Эйнштейна ($V^2 = -\xi_{(t)\mu} \xi^\mu_{(t)}$, $\xi^\mu_{(t)}$ — векторное поле Киллинга). Тогда в пространстве с метрикой $d\tilde{s}^2 = V^{-2} ds^2$ отсутствуют конформные аномалии (т.е. выражения в скобках в правой части (10.1.3), вычисленные в этом пространстве, тождественно обращаются в нуль).

Пэйдж предложил провести вычисления $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T^\mu_\nu \rangle$ сначала в пространстве $d\tilde{s}^2$, используя для функции Грина в нем решение, полученное с помощью ВКБ-приближения, а затем, принимая во внимание инвариантность величин (10.3.13) и (10.3.14), вернуться в исходное физическое

пространство. При этом для скалярного безмассового поля в метрике Шварцшильда для величины $\langle \varphi^2 \rangle_H$ получается выражение (10.3.12), а для $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ — следующее приближенное выражение:

$$\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P = \frac{\pi^2}{90} \theta^4 \left[\frac{1 - (4 - 3z)^2 z^6}{(1 - z)^2} (\delta_\nu^\mu - 4\delta_0^\mu \delta_\nu^0) + 24z^6 (3\delta_0^\mu \delta_\nu^0 + \delta_1^\mu \delta_\nu^1) \right], \quad (10.3.18)$$

где $\theta = (8\pi M)^{-1}$ — температура черной дыры. Поведение отличных от нуля компонент $\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P$ изображено на рис. 82 (штрих-пунктирная линия). Это приближенное выражение было использовано в работе Йорка (1985) для исследования обратного влияния поляризации вакуума на гравитационное поле черной дыры.

Метод Пэйджа можно использовать также для нахождения приближенных значений $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ в вакууме Бульвара. Вычисления дают [Фролов, Зельников (1985a)]

$$\langle \varphi^2 \rangle_B^P = - \frac{M^2}{48\pi^2 r^4 (1 - z)}, \quad (10.3.19)$$

$$\langle T_\nu^\mu \rangle_B^P = \frac{M^2}{1440\pi^2 r^6} \left[\left(\frac{4 - 3z}{2(1 - z)} \right)^2 (-\delta_\nu^\mu + 4\delta_0^\mu \delta_\nu^0) + 6(3\delta_0^\mu \delta_\nu^0 + \delta_1^\mu \delta_\nu^1) \right]. \quad (10.3.20)$$

Выражения (10.3.19)–(10.3.20) согласуются с асимптотиками (10.3.6)–(10.3.7) вблизи горизонта событий и имеют правильную асимптотику на бесконечности. По-видимому, точность, с которой (10.3.19) и (10.3.20) воспроизводят точные значения $\langle \varphi^2 \rangle_B$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle_B$, того же порядка, что и в случае хартль-хокинговского вакуума.

В работе Брауна и Оттевилла (1985) предложен несколько иной метод вычисления $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$ для конформно-инвариантных полей, который в случае скалярного поля приводит к тем же выражениям (10.3.12), (10.3.18)–(10.3.20), что и приближении Пэйджа. Браун и Оттевилл обратили внимание на то, что конформные аномалии исчезают не только в пространствах с метрикой $d\tilde{s}^2 = V^{-2}ds^2$, но и в более широком классе пространств, для которых метрики имеют вид $d\tilde{s}^2 = \exp(at) V^{-2}ds^2$. Если потребовать, чтобы в пространстве $d\tilde{s}^2$ состояние было выбрано так, что исчезают не только след ($\langle T_\mu^\mu \rangle = 0$), но и остальные компоненты $\langle \bar{T}_\nu^\mu \rangle$, то после возвращения в исходное физическое пространство получается вполне определенное значение $\langle T_\nu^\mu \rangle$. Браун и Оттевилл показали, что при $a = 0$ полученное таким образом выражение совпадает с $\langle T_\nu^\mu \rangle_B^P$, а при $a = -2\kappa = -(2M)^{-1}$ — правильно воспроизводит $\langle T_\nu^\mu \rangle_H^P$. В рамках этого подхода можно получить также аналогичные приближенные выражения для вкладов нейтринного и электромагнитного полей в $\langle T_\nu^\mu \rangle$.

Результаты Пэйджа и Брауна, Оттевилла, по-видимому, указывают на то, что основной вклад в вакуумный тензор энергии-импульса для конформно-инвариантных полей в поле черной дыры дают конформные ано-

малии, и если учесть их, то возникающий тензор энергии-импульса достаточно хорошо воспроизводит точное значение $\langle T_\nu^\mu \rangle$ *).

Как уже упоминалось выше, в ряде случаев, когда рассматриваемая точка лежит на горизонте событий, удается точно вычислить значения $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$. Этот замечательный факт связан с особыми геометрическими свойствами пространства-времени вблизи горизонта событий. Остановимся более подробно на этих свойствах.

Метрика Керра обладает симметриями относительно сдвигов по времени t и вращений по φ . Пусть $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$ — соответствующие векторные поля Киллинга, а $\eta = \xi_{(t)} + \Omega^H \xi_{(\varphi)}$ — их линейная комбинация, которая на горизонте является касательной к генераторам горизонта. Нетрудно убедиться, что $\xi_{(\varphi)}$ обращается в нуль на оси симметрии ($\theta = 0, \theta = \pi$), а η — на двумерной поверхности S пересечения горизонтов H^- и H^+ (поверхности бифуркации горизонтов). Антисимметричные тензоры $\xi_{(\varphi)}^\mu{}_\nu$; $\nu | \xi_{(\varphi)} = 0$ и $\eta_\mu; \nu | \eta = 0$ — невырожденные **). Очевидно, что полюсные ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) точки x_0 поверхности S остаются неподвижными при сдвигах как по t , так и по φ .

Если потребовать, чтобы в выбранном состоянии $\langle T_\nu^\mu \rangle$ обладало теми же свойствами симметрии, что и фоновое физическое пространство-время, то эта величина должна удовлетворять уравнению

$$\mathcal{L}_\xi \langle T_{\mu\nu} \rangle \equiv \xi^\alpha \langle T_{\mu\nu} \rangle_{;\alpha} + \xi^\alpha{}_{;\mu} \langle T_{\alpha\nu} \rangle + \xi^\alpha{}_{;\nu} \langle T_{\mu\alpha} \rangle = 0, \quad (10.3.21)$$

где ξ — векторное поле Киллинга, а $\mathcal{L}_\xi$ — производная Ли вдоль него. В точках, где $\xi^\alpha = 0$, эти уравнения принимают вид ограничений на алгебраическую структуру $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Решая эти уравнения, можно показать [Фролов, Зельников (1985b)], что подобный регулярный вакуумный тензор энергии-импульса в точке полюса x_0 поверхности S имеет следующий вид:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = A(k_\mu l_\nu + l_\mu k_\nu) + B(m_\mu \bar{m}_\mu + \bar{m}_\mu m_\nu). \quad (10.3.22)$$

Здесь $z_a = (k, l, m, \bar{m})$ — векторы комплексной световой тетрады:

$$k_\alpha dx^\alpha = -dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr + a \sin^2 \theta d\varphi,$$

*) Отметим в этой связи, что в двумерном пространстве-времени конформная аномалия имеет вид

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \frac{C_s}{24\pi} R,$$

где R — скалярная кривизна, а C_s — коэффициент, зависящий от спина s поля ($C_0 = 1$). Полный тензор энергии-импульса $\langle T_\nu^\mu \rangle$ определяется своим следом с точностью до двух функций от одной переменной, отвечающих произволу в выборе граничных условий [Кристensen, Фуллинг (1977)]. Это обстоятельство позволяет точно вычислять $\langle T_\nu^\mu \rangle$ в различных двумерных моделях, имитирующих черную дыру [по этому поводу см. Девис (1976), Левис и др. (1976), Унру (1977), Фуллинг (1977b), Хискок (1977), Фролов, Вилковиский (1983), Бальбино, Браун (1984), Бальбино (1984а), Курода (1984а), Биррел, Девис (1982)].

**) Обсуждение общих свойств поверхностей, образованных точками, неподвижными под действием группы симметрий, можно найти в работе Бойера (1969); см. также Миллер (1979).

$$l_{\alpha} dx^{\alpha} = \frac{\Delta}{2\rho^2} \left(-dt - \frac{\rho^2}{\Delta} dr + a \sin^2 \theta d\varphi \right),$$

$$m_{\alpha} dx^{\alpha} \equiv (\bar{m}_{\alpha} dx^{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(r + ia \cos \theta)}} [-ia \sin \theta dt + \rho^2 d\theta + i(r^2 + a^2) \sin \theta d\varphi].$$
(10.3.23)

Иными словами, этот тензор определяется двумя константами A и B , причем их разность фиксируется величиной конформных аномалий:

$$2(B - A) = \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = (a_s + b_s) C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (10.3.24)$$

В случае сферически-симметричной черной дыры в качестве x_0 может быть выбрана любая точка поверхности S . При этом отличные от нуля компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$T_t^t = T_r^r = -A, \quad T_{\theta}^{\theta} = T_{\varphi}^{\varphi} = B. \quad (10.3.25)$$

Из непрерывности $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ и свойства инвариантности (10.3.21) следует, что $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ имеет вид, аналогичный (10.3.22) на полюсе горизонта событий и вне поверхности S .

Другим обстоятельством, которое также приводит к существенному упрощению задачи вычисления $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_{\nu}^{\mu} \rangle$ на горизонте событий, является следующее. Пусть $\Pi(x, x')$ — любой бискаляр (например, функция Грина $G_H(x, x')$ скалярного поля), обладающий теми же свойствами симметрии, что и фоновое пространство-время. Тогда

$$\mathcal{L}_{\xi} \Pi(x, x') + \mathcal{L}_{\xi'} \Pi(x, x') =$$

$$= \left(\xi^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} + \xi'^{\alpha'} \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \right) \Pi(x, x') = 0. \quad (10.3.26)$$

Здесь $\mathcal{L}_{\xi}$ ($\mathcal{L}_{\xi'}$) — производная Ли вдоль векторного поля Киллинга ξ по первому (второму) аргументу. Если точки x и x' не совпадают с осью вращения и не лежат на поверхности S , то уравнение (10.3.26) показывает, что бискаляр $\Pi(x, x')$ зависит от разностей $t - t'$ и $\varphi - \varphi'$. Если же точка x' лежит на полюсе поверхности S , то функция $\Pi(x, x_0)$ вообще не зависит ни от t , ни от φ .

Это, в частности, приводит к тому, что волновое уравнение, которому подчиняется функция $-iG_H(x, x_0)$, существенно упрощается и допускает точное решение. В координатах $R = \Delta^{1/2} \sin \theta$, $z = (r - M) \cos \theta$ это уравнение принимает вид

$$\left[\frac{1}{R} \partial_R (R \partial_R) + \partial_z^2 \right] (-iG_H(R, z; x_0)) = -\frac{\kappa}{4\pi^2 R} \delta(R) \delta(z - z_0), \quad (10.3.27)$$

где $z_0 = \sqrt{M^2 - a^2}$. Заметим, что решение этого уравнения совпадает с потенциалом поля точечного заряда $e = \kappa/8\pi^2$, помещенного в точке $z = z_0$ на оси $x = y = 0$ ($R^2 = x^2 + y^2$) в плоском пространстве. Используя это решение, находим

$$G_H(x, x_0) = \frac{i\kappa}{8\pi^2 (r - M - \sqrt{M^2 - a^2} \cos \theta)} \quad (10.3.28)$$

Вычитая из этого выражения расходящуюся часть [см. (10.1.10)] и устремляя x к x_0 , получаем для величины $\langle \varphi^2(x_0) \rangle_H$ на полюсе горизонта событий следующее значение [Фролов (1982, 1983)] *):

$$\langle \varphi^2(x_0) \rangle_H = \frac{1}{48\pi^2} \frac{r_+^2 - 3a^2}{(r_+^2 + a^2)^2} \quad (10.3.29)$$

(при $a = 0$ это выражение было получено Канделасом (1980) путем суммирования ряда для представления функции Грина.)

Фролов и Зельников (1985b) аналогичным методом вычислили величину $\langle T_\nu^\mu(x_0) \rangle_H$ для электромагнитного поля. Коэффициенты A и B в выражении (10.3.22) получили следующие значения:

$$A = \frac{1}{1920\pi^2 M^4 r_+^3} [-15M^3 - 195M^2(M^2 - a^2)^{1/2} + 292(M^2 - a^2)^{3/2}], \quad (10.3.30)$$

$$B = \frac{1}{1920\pi^2 M^4 r_+^3} [-15M^3 - 117M^2(M^2 - a^2)^{1/2} + 188(M^2 - a^2)^{3/2}].$$

При $a = 0$ эти выражения воспроизводят результат, полученный Эльстером (1984) путем суммирования рядов.

Отметим одно любопытное свойство выражения (10.3.29). Нетрудно убедиться, что его можно переписать в виде

$$\langle \varphi^2(x_0) \rangle_H = \frac{1}{48\pi^2} K, \quad (10.3.31)$$

где K — гауссова кривизна двумерной поверхности черной дыры в точке ее полюса x_0 . [Вычисление K на поверхности керровской черной дыры см. Смарт (1973b).] Выражение (10.3.31) справедливо и в случае, когда черная дыра помещена во внешнее статическое аксиально-симметричное гравитационное поле.

*) Этот же прием можно использовать для вычисления $\langle \varphi^2 \rangle_H$ в случае, когда черная дыра помещена во внешнее аксиально-симметричное статическое гравитационное поле [Фролов, Гарсия (1983)] или окружена зеркальной оболочкой, описываемой уравнением $r = r_0$ ($\varphi|_{r_0} = 0$). В последнем случае задача сводится к нахождению поля внутри проводящего заземленного эллипсоида вращения, описываемого уравнением

$$\frac{R^2}{\Delta(r_0)} + \frac{z^2}{(r_0 - M)^2} = 1,$$

от точечного заряда, помещенного в его фокус. Соответствующее значение $\langle \varphi^2 \rangle_H$; r_0 равно

$$\langle \varphi^2 \rangle_H; r_0 = \langle \varphi^2 \rangle_H - \delta_{r_0} \langle \varphi^2 \rangle,$$

где

$$\delta_{r_0} \langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{8\pi^2 (r_+^2 + a)} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{Q_l(b)}{P_l(b)}.$$

Здесь $b = (r_0 - M) / (M^2 - a^2)^{1/2}$, а P_l и Q_l — функции Лежандра.

Нетрудно показать, что в приближении Пэйджа величина $\langle \varphi^2 \rangle_H^P$ на горизонте событий любой статической (в том числе и деформированной внешним полем) черной дыры может быть записана в виде (10.3.31). В этом же приближении величина $\epsilon = -\langle T_t^t \rangle_H^P$, характеризующая плотность энергии на поверхности черной дыры, описывается выражением [Фролов, Санчес (1985)]

$$\epsilon = -(7a_s + 12b_s)K^2 + a_s^{(2)}\Delta K, \quad (10.3.32)$$

где $^{(2)}\Delta$ — двумерный лапласиан на поверхности черной дыры, a_s и b_s — коэффициенты, входящие в выражение для конформных аномалий (10.1.3).

Для черных дыр с массой больше планковской вклад массивных полей в поляризацию вакуума значительно (на фактор $\epsilon = (\lambda/L)^2$, $\lambda = \hbar/mc$, L — характерный радиус кривизны) меньше вклада безмассовых полей. Имеется, однако, ряд причин, по которым изучение вклада массивных полей может представлять интерес. Прежде всего отметим, что при $\epsilon \ll 1$ удается разделить вклады реальных и виртуальных частиц в $\langle T_\nu^\mu \rangle$. Так, в состоянии хартль-хокинговского вакуума вклад реальных частиц тепловой бани в $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ содержит экспоненциально малый фактор $\exp(-\beta G M m / \hbar c)$, в то время как вклад виртуальных частиц зависит от M степенным образом*). Эффект поляризации вакуума массивных полей допускает значительно более детальное изучение, поскольку имеется возможность использовать разложение по малому безразмерному параметру ϵ . В том случае, когда фоновое гравитационное поле удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна, величина $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ для массивных скалярного, спинорного и векторного полей в первом неисчезающем порядке по ϵ может быть получена вариацией следующего эффективного действия [Фролов, Зельников (1984)]:

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_H^{(s)} = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W^{(s)}}{\delta g^{\mu\nu}(x)}, \quad (10.3.33)$$

где

$$W^{(s)} = (96 \cdot 7! \pi^2 m^2)^{-1} \int d^4 x \sqrt{-g} (A_s R_{\alpha\beta} \gamma^\delta R_{\gamma\delta} \epsilon^\xi R_{\epsilon\xi}^{\alpha\beta} + B_s R R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}). \quad (10.3.34)$$

Здесь m — масса поля, а коэффициенты A_s и B_s для поля спина s равны соответственно

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, & A_{1/2} &= -4, & A_1 &= 3, \\ B_0 &= 18 - 84\xi, & B_{1/2} &= 12, & B_1 &= -30 \end{aligned} \quad (10.3.35)$$

(ξ — коэффициент при члене $R\varphi^2$ в действии для скалярного поля; при $\xi = 1/6$ и $m = 0$ поле конформно-инвариантно). Для шварцшильдовской

*) Поскольку значения $\langle T_\nu^\mu \rangle$ в различных "вакуумах" отличаются друг от друга вкладом реальных частиц теплового излучения, то $\langle T_\nu^\mu \rangle_V$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle_U$ вблизи черной дыры практически совпадают с $\langle T_\nu^\mu \rangle_H$ везде, за исключением экспоненциально узкой ($\sim r_g \exp(-\beta G M m / \hbar c)$) полоски вблизи горизонта событий. Внутри полоски поведение этих величин различно: $\langle T_\nu^\mu \rangle_V$ расходится на H^- и H^+ , а $\langle T_\nu^\mu \rangle_U$ — на H^- , оставаясь конечным на H^+ .

Таблица

Литература	Параметры поля		Параметры черной дыры		Вычисления проводились			$\langle \varphi^2 \rangle$	$\langle T^\mu_\nu \rangle$	Вакуумные состояния	Примечания
	масса m	спин s	угловой момент J	заряд Q	На		вне				
					горизонте (а) событий						
Крингенсен, Фуллинг (1977)			0	0	+	+	+	+	H, V, U	Общий анализ	
Канделас (1980)	0	0	0	0	+	+	+	+	H, V, U	Представления для $G, \langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T^\mu_\nu \rangle$ в виде рядов. Вычисление $\langle \varphi^2 \rangle_H$ и $\langle T^\mu_\nu \rangle_H$ на горизонте	
Канделас и др. (1981)	0	1; 2	$\neq 0$	0	+	+	+	+	V	Суммирование рядов. Анализ расхождений на горизонте	
Фосетт, Уайтинг (1982)	0	0	0	0	+	+	+	+	H, V, U	Численные расчеты	
Пэдж (1982)	0	0	0	0	+	+	+	+	H	Приближенный метод	
Нугаев (1982)	0	0; 1	0	0	+	+	+	+	V	Приближенный метод	
Фролов (1982)	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$	+	+	+	+	H	Явное аналитическое выражение	

Т а б л и ц а (продолжение)

Литература	Параметры поля		Параметры черной дыры		Вычисления проводились			$\langle \varphi^2 \rangle$	$\langle T^{\mu}_{\nu} \rangle$	Вакуумные состояния	Примечания
	масса m	спин s	угловой момент J	заряд Q	на	вне	(а) со-бытий				
Эльстер (1982a)	0	0	0	0	+	+	+		+	(Н; r_0)	Анализ влияния границы
Эльстер (1982b)	0	0	0	0	+	+	+	+		(Н; r_0)	Явное выражение
Фролов, Зельников (1982)	$\neq 0$	0	0	0	+	+	+		+	Н	Разложение по параметру $\epsilon=(m_{\text{Pl}}^2/Mm)^2$
Фосетт (1983)	0	0	0	0	+	+	+		+	Н	Численные расчеты
Эльстер (1983a)	0	0	0	0	+	+	+		+	(Н; r_0)	Численные расчеты
Эльстер (1983b)	0	0	0	0	+	+	+		+	U	Численные расчеты
Болашенко, Фролов (1983)	0	0	0	0	+	+	+	+	+	Н	Приближенный метод
Фролов, Зельников (1983)	$\neq 0$	0; 1/2; 1	$\neq 0$	0	+	+	+		+	Н	Разложение по параметру ϵ

Т а б л и ц а (окончание)

Литература	Параметры поля		Параметры черной дыры		Вычисления про- водились			$\langle \varphi^2 \rangle$	$\langle T_{\mu\nu} \rangle$	Вакуум- ные со- стояния	Примечания
	масса m	спин s	угловой момент J	заряд Q	на		горизонте (а) со- бытий				
					на	висе					
Фролов, Гарсия (1983)	0	0	0	0	+	+	+	+		Н	Возмущенная черная дыра. Явное аналитическое выражение
Фролов, Зельников (1984)	$\neq 0$	0; 1/2; 1	$\neq 0$	0	+	+	+	+	+	Н	Разложение по параметру ϵ
Канделас, Ховард (1984)	0	0	0	0	+	+	+	+		Н	численные расчеты
Ховард, Канделас (1984)	0	0	0	0	+	+	+	+		Н	
Ховард (1984)	0	0	0	0	+	+	+		+	Н	Обоснование и оценка точности
Занниас (1984)	0	0	0	0	+	+	+		+	Н	Приближения
Эльстер (1984)	0	0	0	$\neq 0$	+	+	+		+	Н	Пэйджа
	0	1	0	0	+	+	+		+	Н	Приближенный метод
Фролов, Санчес (1985)	0	0; 1/2; 1	0	0	+	+	+	+	+	Н	Явное аналитическое выражение
	0	0; 1/2; 1	0	0	+	+	+	+	+	Н, В	Возмущенная черная дыра. Приближенный метод
Браун, Оттевилл (1985)	0	0; 1/2; 1	0	0	+	+	+		+	Н, В	Приближенный метод
Фролов, Зельников (1985b)	0	1	$\neq 0$	0	+	+	+		+	Н	Явное аналитическое выражение

черной дыры в этом приближении $\langle T_\nu^\mu \rangle_N^{(s)}$ имеет вид [Фролов, Зельников (1982)]

$$\langle T_\nu^\mu \rangle_N^{(s)} = \frac{M^2}{10080\pi^2 m^2 r^8} [A_s p_\nu^\mu + 3(2B_s + A_s)q_\nu^\mu], \quad (10.3.36)$$

где отличные от нуля компоненты p_ν^μ и q_ν^μ суть ($z = 2M/r$)

$$\begin{aligned} p_t^t &= -15 + 16z, & p_r^r &= -3 + 4z, & p_\theta^\theta &= p_\varphi^\varphi = 9 - 11z, \\ q_t^t &= -10 + 11z, & q_r^r &= 4 - 3z, & q_\theta^\theta &= q_\varphi^\varphi = -12 + 14z. \end{aligned} \quad (10.3.37)$$

Обращает на себя внимание качественное сходство поведения $\langle T_\nu^\mu \rangle_N$ для безмассовых и массивных полей. Для скалярного массивного ($\xi = 1/6$) поля плотность энергии $\epsilon = -\langle T_t^t \rangle_N$ положительна вдали от черной дыры, а вблизи нее меняет знак и становится отрицательной на горизонте, аналогично тому, как это происходит для конформного скалярного безмассового поля. Для векторного массивного поля, так же как и для электромагнитного, плотность энергии ϵ положительна на горизонте событий.

Вращение черной дыры приводит к появлению в окружающем пространстве циркулярного потока плотности энергии, связанного с поляризацией вакуума и описываемого компонентой $\langle T_\varphi^t \rangle \neq 0$. Выражение $\langle T_\nu^\mu \rangle_N^{(s)}$ для массивных полей в метрике Керра было получено и исследовано в работах Фролова и Зельникова (1983, 1984).

Завершая изложение основных результатов вычислений $\langle \varphi^2 \rangle$ и $\langle T_\nu^\mu \rangle$, приведем для удобства ссылок следующую таблицу, в которой содержится перечень основных работ, посвященных изучению поляризации вакуума в черных дырах, и краткая характеристика полученных результатов. В графах этой таблицы дана информация о массе m и спине s поля, для которого проводились вычисления; указано, является ли рассматриваемая черная дыра вращающейся ($J \neq 0$) или заряженной ($Q \neq 0$); значения каких величин ($\langle \varphi^2 \rangle$ или $\langle T_\nu^\mu \rangle$), для какого состояния ($|N\rangle$, $|N, r_0\rangle$, $|U\rangle$ или $|V\rangle$) и где (на горизонте или вне его) вычислялись, а также дается краткая информация о методе, с помощью которого проводились расчеты.

В заключение главы отметим, что в настоящее время имеется не только качественное понимание особенностей эффектов поляризации вакуума в черных дырах, но и хорошее количественное описание их.

ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

§ 11.1. Черные дыры и термодинамика

Открытие Хокингом теплового излучения черной дыры было для большинства специалистов полной неожиданностью, хотя к моменту этого открытия уже существовало довольно много соображений, свидетельствующих о тесном переплетении физики черных дыр и термодинамики.

Уилер, по-видимому, первым обратил внимание на то, что в рамках классической теории тяготения уже сам факт существования черной дыры противоречит закону возрастания энтропии. Действительно, представим себе, что черная дыра поглощает горячее тело, обладающее некоторым запасом энтропии. Тогда внешний наблюдатель видит уменьшение полной энтропии в части мира, доступной его наблюдению. Чисто формально этого уменьшения энтропии можно было бы избежать, если просто приписать энтропию, связанную с упавшим телом, внутренности черной дыры. Однако этот "выход" явно неудовлетворителен, поскольку любые попытки "внешнего" наблюдателя определить значение энтропии, "поглощенной" черной дырой вместе с горячим телом, обречены на неудачу. По прошествии краткого времени после этого процесса черная дыра становится стационарной и вследствие эффекта "выпадания волос" полностью "забывает" такие "детали", как строение упавшего тела и его энтропию.

Если мы не хотим отказаться от закона возрастания энтропии только по той причине, что во Вселенной где-то образовалась черная дыра, следует сделать вывод, что всякая черная дыра *сама по себе* обладает определенным запасом энтропии и что горячее тело при падении передает ей не только массу, угловой момент и заряд, но и свою энтропию S , так что энтропия черной дыры возрастает на величину, не меньшую S . Бекенштейн (1973а) обратил внимание на то, что свойства одной из характеристик черной дыры — площади ее поверхности A — напоминают свойства энтропии. Действительно, согласно теореме Хокинга при любых классических процессах площадь A не убывает, т.е. ведет себя так же, как энтропия. Вообще оказалось, что аналогия между физикой черных дыр и термодинамикой простирается довольно далеко. Она относится как к конкретным термодинамическим устройствам (типа тепловой машины), так и к общим законам термодинамики, каждому из которых нашелся свой аналог в физике черных дыр.

Как и термодинамическая система, произвольная черная дыра после релаксационных процессов приходит в равновесное (стационарное) состояние, в котором она полностью описывается заданием малого числа параметров: M , J , Q . Площадь поверхности A стационарной черной дыры яв-

ляется функцией этих параметров:

$$A = 4\pi(2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - J^2/M^2}). \quad (11.1.1)$$

Это соотношение можно обратить и найти выражение для внутренней энергии черной дыры

$$M \equiv M(A, J, Q) = \left\{ \frac{\pi [(Q^2 + A/4\pi)^2 + 4J^2]}{A} \right\}^{1/2}. \quad (11.1.2)$$

Для двух стационарных черных дыр со слегка отличными значениями площади δA , углового момента δJ и электрического заряда δQ внутренняя энергия отличается на величину

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega^H \delta J + \Phi^H \delta Q, \quad (11.1.3)$$

где $\kappa = 4\pi \sqrt{M^2 - Q^2 - J^2/M^2}/A$ — поверхностная гравитация, $\Omega^H = 4\pi J/MA$ — угловая скорость и $\Phi^H = 4\pi Qr_+/A$ — электрический потенциал черной дыры. Второй и третий члены этой формулы описывают изменение энергии вращения и электрической энергии.

Это соотношение аналогично первому закону термодинамики; при этом в качестве аналога температуры (величины, сопряженной энтропии) выступает величина, пропорциональная поверхностной гравитации κ . Результат Хокинга о тепловом характере излучения стационарной черной дыры не только подтверждает указанную аналогию, но и позволяет найти коэффициент, связывающий температуру θ и поверхностную гравитацию κ :

$$\theta = \hbar \kappa / 2\pi c k. \quad (11.1.4)$$

При этом соотношение (11.1.3) в точности совпадает с первым законом термодинамики

$$\delta E = \theta \delta S^H + \Omega^H \delta J + \Phi^H \delta Q, \quad (11.1.5)$$

если для энтропии черной дыры принять выражение

$$S^H = A/4l_p^2, \quad l_p^2 = \hbar G/c^3. \quad (11.1.6)$$

Приведенные соображения дают все основания отнести серьезно к упомянутой аналогии между физикой черных дыр и термодинамикой. Основные законы физики черных дыр, играющие роль, аналогичную законам термодинамики, мы рассмотрим в § 11.3 после обсуждения общих свойств поверхностной гравитации κ и вывода так называемых массовых формул, обобщающих соотношения (11.1.2) и (11.1.3) на случай произвольных стационарных черных дыр, окруженных стационарным распределением вещества и полей.

§ 11.2. Поверхностная гравитация. Массовая формула

Согласно теоремам единственности (§§ 6.3, 6.4) уединенная стационарная черная дыра в общем случае является керр-ньюмоновской. Для такой черной дыры значения угловой скорости Ω^H , поверхностной гравитации κ и электрического потенциала Φ^H постоянны на горизонте событий. Свойство постоянства этих величин сохраняется и в том случае, если черная дыра окружена веществом, при условии, что геометрия пространства-времени

остается стационарной и аксиально-симметричной или статической. Поскольку это свойство существенно для развития термодинамической аналогии в физике черных дыр, остановимся на нем подробнее.

Пусть $\xi_{(t)}^\mu \partial_\mu = \partial_t$ и $\xi_{(\varphi)}^\mu \partial_\mu = \partial_\varphi$ — векторные поля Киллинга, отвечающие сдвигу по времени и вращению. Определим бивектор $\rho_{\mu\nu}$:

$$\rho_{\mu\nu} = 2\xi_{(t)[\mu} \xi_{(\varphi)\nu]} \quad (11.2.1)$$

Тогда, как показал Картер (1973а), при выполнении условия циркулярности (см. § 6.4) горизонт событий произвольной стационарной аксиально-симметричной черной дыры совпадает с множеством точек, где бивектор $\rho_{\mu\nu}$ становится светоподобным ($\rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu} = 0$); при этом касательные векторы l^μ к горизонту событий совпадают по направлению со световым вектором, лежащим в двумерной световой площадке, растягиваемой векторами $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$. Выбирая нормировку l^μ соответствующим образом, имеем

$$l^\mu = \xi_{(t)}^\mu + \Omega^H \xi_{(\varphi)}^\mu \quad (11.2.2)$$

Из свойств симметрии пространства-времени следует, что угловая скорость черной дыры Ω^H не может зависеть ни от времени t , ни от угла φ :

$$\xi_{(t)}^\mu \Omega_{,\mu}^H = \xi_{(\varphi)}^\mu \Omega_{,\mu}^H = 0 \quad (11.2.3)$$

Нетривиальным моментом является то, что Ω^H не зависит также и от "широты" точки на поверхности черной дыры, т.е. постоянна на всей этой поверхности. Для доказательства этого свойства введем обозначения

$$X = \xi_{(\varphi)} \cdot \xi_{(\varphi)}, \quad W = \xi_{(t)} \cdot \xi_{(\varphi)}, \quad V = -\xi_{(t)} \cdot \xi_{(t)} \quad (11.2.4)$$

Поскольку $\xi_{(\varphi)}$ (как и $\xi_{(t)}$) лежит в плоскости, касательной к горизонту событий, то $\xi_{(\varphi)} l = 0$, и из (11.2.2) имеем

$$X \Omega^H = -W \quad (11.2.5)$$

Если продифференцировать это соотношение по x^α и использовать свойство коммутативности $[\xi_{(t)}, \xi_{(\varphi)}] = 0$, то нетрудно получить следующее равенство:

$$X^2 \Omega_{,\alpha}^H = 2(\xi_{(\varphi)}^\beta W - \xi_{(t)}^\beta X) \xi_{(\varphi)\beta;\alpha} \quad (11.2.6)$$

Умножим теперь обе части этого равенства на $\rho_{\gamma\delta}$ и проведем антисимметризацию по индексам α, γ и δ . Если учесть соотношение

$$\xi_{(\varphi)\alpha}[\beta \rho_{\gamma\delta}] = \xi_{(\varphi)\alpha} \xi_{(\varphi)[\beta} \xi_{(t)\gamma} \xi_{(t)\delta]} - \xi_{(t)\alpha} \xi_{(\varphi)[\beta} \xi_{(\varphi)\gamma} \xi_{(\varphi)\delta]} \quad (11.2.7)$$

вытекающее из условия циркулярности (6.4.4), и обращение в нуль на горизонте инварианта $W^2 + XV = -2\rho_{\alpha\beta} \rho^{\alpha\beta}$, то можно убедиться, что правая часть полученного выражения равна нулю, и мы имеем

$$X^2 \Omega_{[\alpha}^H \rho_{\gamma\delta]} = 0 \quad (11.2.8)$$

Вне оси симметрии ($X \neq 0$) это условие означает, что $\Omega_{,\alpha}^H$ лежит в двумерной плоскости, растягиваемой векторами $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$, а соотношение (11.2.3) показывает, что $\Omega_{,\alpha}^H = 0$. Тем самым доказано свойство постоянства Ω^H на горизонте событий. (В полюсных точках Ω^H определяется по непрерывности.)

Свойство постоянства угловой скорости черной дыры Ω^H можно сформулировать несколько иным способом. Введем векторное поле Киллинга η :

$$\eta^\mu = \xi_{(t)}^\mu + \Omega^H \xi_{(\varphi)}^\mu. \quad (11.2.9)$$

На горизонте событий это векторное поле касательно к образующим горизонта и $\eta \cdot \eta = 0^*$). Иными словами, постоянство Ω^H означает, что горизонт событий совпадает с *горизонтом Киллинга*. Последний определяется как световая поверхность, световые касательные векторы к которой совпадают (при соответствующей нормировке) с векторами некоторого фиксированного поля Киллинга.

Перейдем теперь к доказательству постоянства поверхностной гравитации κ . Эта величина уже встречалась нам неоднократно, в частности, при рассмотрении различных свойств керровской черной дыры. Дадим теперь общее определение этой величины, пригодное для произвольной стационарной (не обязательно уединенной) черной дыры.

Поскольку величина $\eta \cdot \eta$ (равная нулю) постоянна на поверхности горизонта событий, то вектор $(\eta \cdot \eta)_{; \nu}$ нормален к этой поверхности. В силу светового характера последней имеем

$$(\eta \cdot \eta)^{; \nu} = 2\kappa \eta^\nu, \quad (11.2.10)$$

где κ — инвариантная функция на поверхности черной дыры, называемая *поверхностной гравитацией*. Так как $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$ касательны к горизонту и $\mathcal{L}_{\xi_{(t)}} \eta = \mathcal{L}_{\xi_{(\varphi)}} \eta = 0$, то, применяя операторы $\mathcal{L}_{\xi_{(t)}}$ и $\mathcal{L}_{\xi_{(\varphi)}}$ к обеим частям (11.2.10), можно убедиться, что $\xi_{(t)}^\mu \kappa_{, \mu} = \xi_{(\varphi)}^\mu \kappa_{, \mu} = 0$. Это свойство — простое отражение свойств симметрии, присущей пространству-времени. Гораздо менее тривиальным является независимость κ от "широты" точки на поверхности черной дыры.

Для доказательства постоянства κ на всем горизонте событий, следуя работе Бардина и др. (1973), удобно использовать тетрадный формализм. С этой целью дополним $l^\mu = \eta^\mu|_{H^+}$ до комплексной световой тетрады, выбрав комплексные световые векторы $m^\mu, \bar{m}^\mu$ касательными к поверхности горизонта и нормированными соотношением $m^\mu \bar{m}_\mu = 1$ и действительный световой вектор n^μ , ортогональный m^μ и $\bar{m}^\mu$ и нормированный условием $l^\mu n_\mu = -1$. С помощью введенной комплексной световой тетрады κ можно записать в следующем виде:

$$\kappa = -l_{\nu; \mu} n^\nu l^\mu. \quad (11.2.11)$$

Действительно, если, используя $\eta_{\mu; \nu} = -\eta_{\nu; \mu}$, переписать (11.2.10) в виде

$$\eta^\mu \eta^\nu_{; \mu} = \kappa \eta^\nu \quad (11.2.12)$$

и воспользоваться тем, что на H $\eta^\mu = l^\mu$, то после умножения (11.2.12) на n^ν получаем (11.2.11).

*) Существование векторного поля Киллинга (11.2.9), обладающего этим свойством, является следствием теоремы Хокинга (§ 6.2), из которой также вытекает, что $\Omega^H = \text{const.}$

С помощью (11.2.11) получим

$$m^{\alpha}{}_{\kappa;\alpha} = -l_{\nu;\mu} n^{\nu} l^{\mu} m^{\alpha} - l_{\nu;\mu} n^{\nu}{}_{;\alpha} l^{\mu} m^{\alpha} - l_{\nu;\mu} n^{\nu} l^{\mu}{}_{;\alpha} m^{\alpha}. \quad (11.2.13)$$

Поскольку первый из членов в правой части зависит лишь от значения l^{μ} на H , то можно использовать совпадение на этой поверхности l^{μ} с векторным полем Киллинга η^{μ} . В частности, с помощью соотношения (П.15) для векторного поля Киллинга $\eta_{\nu}{}_{;\mu\alpha} = R_{\beta\alpha\mu\nu} \eta^{\beta}$ приведем первый член в правой части (11.2.13) к виду $-R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^{\alpha} m^{\beta} l^{\gamma} n^{\delta}$. Используя (11.2.12) и соотношение $l_{\nu} n^{\nu}{}_{;\alpha} = -n^{\nu} l_{\nu}{}_{;\alpha}$, второй член в правой части (11.2.13) запишем в виде $\kappa l_{\nu;\alpha} n^{\nu} m^{\alpha}$. Покажем теперь, что этот член сокращается с последним членом в правой части (11.2.13). С этой целью заметим, что условия нормировки нулевой тетрады приводят к соотношению

$$g^{\mu\beta} = -n^{\beta} l^{\mu} - l^{\beta} n^{\mu} + m^{\beta} \bar{m}^{\mu} + \bar{m}^{\beta} m^{\mu}. \quad (11.2.14)$$

Используя это соотношение, а также условия отсутствия сдвига и расширения поверхности горизонта событий

$$\rho = -l_{\alpha;\beta} m^{\alpha} \bar{m}^{\beta} = 0, \quad \sigma = -l_{\alpha;\beta} m^{\alpha} m^{\beta} = 0, \quad (11.2.15)$$

перепишем последний член в правой части (11.2.13) в виде

$$\begin{aligned} -l_{\nu;\mu} n^{\nu} l^{\mu}{}_{;\alpha} m^{\alpha} &= -l_{\nu;\mu} n^{\nu} g^{\mu\beta} l_{\beta;\alpha} m^{\alpha} = \\ &= l_{\nu;\mu} n^{\nu} l^{\mu} n^{\beta} l_{\beta;\alpha} m^{\alpha} = -\kappa l_{\nu;\alpha} n^{\nu} m^{\alpha}. \end{aligned} \quad (11.2.16)$$

Это выражение лишь знаком отличается от второго члена и сокращается с ним. В итоге имеем

$$m^{\alpha}{}_{\kappa;\alpha} = -R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^{\alpha} m^{\beta} l^{\gamma} n^{\delta}. \quad (11.2.17)$$

Заметим теперь, что на поверхности горизонта

$$l_{\alpha;\beta} m^{\alpha}{}_{;\gamma} \bar{m}^{\beta} m^{\gamma} = l_{\alpha;\beta} m^{\alpha} \bar{m}^{\beta}{}_{;\gamma} m^{\gamma} = 0. \quad (11.2.18)$$

В этом можно убедиться с помощью (11.2.14), (11.2.15) и условий нормировки векторов тетрады. Поэтому с учетом (П. 15) и (11.2.15) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= -\rho{}_{;\gamma} m^{\gamma} = (l_{\alpha;\beta} m^{\alpha} \bar{m}^{\beta}){}_{;\gamma} m^{\gamma} = R_{\epsilon\alpha\beta\gamma} l^{\epsilon} m^{\alpha} \bar{m}^{\beta} m^{\gamma} = \\ &= -R_{\alpha\beta} l^{\alpha} m^{\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^{\alpha} m^{\beta} l^{\gamma} n^{\delta}. \end{aligned} \quad (11.2.19)$$

Используя это соотношение и уравнения Эйнштейна $R_{\alpha\beta} l^{\alpha} m^{\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} l^{\alpha} m^{\beta}$, перепишем (11.2.17) в виде

$$m^{\alpha}{}_{\kappa;\alpha} = -8\pi T_{\alpha\beta} l^{\alpha} m^{\beta}. \quad (11.2.20)$$

Для завершения доказательства постоянства κ мы предположим, что тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условию энергодоминантности (см. Приложение), т.е. для светоподобного вектора l_{α} $T_{\alpha\beta} l^{\alpha}$ является непространственноподобным вектором. При выполнении этого условия вектор $T_{\alpha\beta} l^{\alpha}$ на горизонте событий обязан быть светоподобным [случай временноподобного вектора исключается, поскольку на горизонте $T_{\alpha\beta} l^{\alpha} l^{\beta} = \Phi = 0$; см. (6.2.2)]. Поэтому $T_{\alpha\beta} l^{\alpha} m^{\beta} = 0$ и соотношение (11.2.20) доказывает, что κ постоянна на горизонте.

Интегральные кривые $x^\mu = x^\mu(v)$ векторного поля η^μ ($dx^\mu/dv = \eta^\mu$) на горизонте событий совпадают с его образующими и поэтому являются геодезическими. В этом можно также непосредственно убедиться с помощью соотношения (11.2.12). Поскольку правая часть этого уравнения не обращается в нуль, то киллинговский параметр v не совпадает с аффинным параметром λ вдоль световых геодезических, описываемых этим уравнением. Связь v и λ имеет вид $\lambda = a e^{kv} + b$, где a и b — произвольные числа, отвечающие произволу в выборе аффинного параметра λ .

Остановимся теперь на физической интерпретации κ . Рассмотрим стационарного наблюдателя, движущегося вблизи черной дыры, для которого мировая линия совпадает с интегральной кривой поля Киллинга η^μ . Вектор 4-скорости такого наблюдателя

$$u^\mu = \frac{\eta^\mu}{|\eta_\alpha \eta^\alpha|^{1/2}}.$$

Если η^μ описывается выражением (11.2.9), то такой наблюдатель, находясь вблизи горизонта событий, обращается с угловой скоростью, совпадающей с угловой скоростью черной дыры. Очевидно, движение подобного наблюдателя негеодезично, 4-ускорение a^μ его движения равно [ср. с (П. 16)]

$$a^\mu = - \frac{\eta^\mu{}_{;\alpha} \eta^\alpha}{\eta_\beta \eta^\beta} \quad (11.2.21)$$

Обозначим $a = |a_\mu a^\mu|^{1/2}$ и $\eta = |\eta_\beta \eta^\beta|^{1/2}$. Тогда, сравнивая (11.2.12) и (11.2.21), получим

$$\kappa = \lim (\eta a), \quad (11.2.22)$$

где $\lim$ означает переход к пределу, при котором рассматриваемая точка, в которой вычисляется выражение ηa , стремится к горизонту событий.

Для невращающейся черной дыры η не что иное, как фактор красного смещения ($\eta = \sqrt{-g_{tt}}$). Представим себе, что тело покоится вблизи горизонта событий, удерживаемое невесомой жесткой нитью. Если масса тела m , то, чтобы оно оставалось в покое, на него со стороны нити должна действовать сила f^μ такая, что $f = |f_\mu f^\mu|^{1/2} = ma$. Можно показать, что при этом достаточно, чтобы на другой (удаленный) конец нити действовала сила $f_0 = m\eta a$ (см. § 2.2). Поэтому величину ηa можно интерпретировать как ускорение тела, покоящегося вблизи черной дыры, измеренное в системе отсчета удаленного наблюдателя. Иными словами, поверхностная гравитация κ характеризует предельную "напряженность" гравитационного поля на поверхности черной дыры с точки зрения удаленного наблюдателя. Аналогичный смысл имеет κ и для вращающейся черной дыры — с той лишь разницей, что рассматриваемое тело вращается со скоростью черной дыры.

При описании физических эффектов в поле заряженных черных дыр наряду с κ обычно входит другая инвариантная величина Φ^H — потенциал электрического поля на поверхности черной дыры. В гл. 7 отмечалось, что

эта величина постоянна на поверхности керр-ньюменовской черной дыры. Покажем, что данный результат имеет общий характер и справедлив для любой статической или аксиально-симметричной стационарной (не обязательно уединенной) черной дыры.

Пусть ξ^μ — векторное поле Киллинга и $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, удовлетворяющий уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= 4\pi j^\mu, \\ F_{[\mu\nu,\alpha]} &= 0 \end{aligned} \quad (11.2.23)$$

и подчиненный условию симметрии

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = 0. \quad (11.2.24)$$

Тогда нетрудно убедиться, что вектор $E_\mu = -F_{\mu\nu}\xi^\nu$ удовлетворяет условию

$$E_{[\mu;\nu]} = 0 \quad (11.2.25)$$

и, следовательно, является градиентом некоторой функции Φ :

$$E_\mu = \Phi_{;\mu}. \quad (11.2.26)$$

Покажем, что если A_μ — вектор-потенциал поля $F_{\mu\nu}$, удовлетворяющий условию симметрии

$$\mathcal{L}_\xi A^\mu \equiv \xi^\alpha A^\mu{}_{;\alpha} - A^\alpha \xi^\mu{}_{;\alpha} = 0, \quad (11.2.27)$$

то в качестве Φ можно выбрать величину

$$\Phi = -A_\alpha \xi^\alpha. \quad (11.2.28)$$

Действительно, дифференцируя (11.2.28) и используя (11.2.27), имеем

$$\Phi_{;\mu} = -A_{\alpha;\mu} \xi^\alpha - A_\alpha \xi^\alpha{}_{;\mu} = -A_{\alpha;\mu} \xi^\alpha + A_{\mu;\alpha} \xi^\alpha = E_\mu. \quad (11.2.29)$$

Для определенности будем считать, что потенциал выбран таким образом, что A_μ обращается в нуль на бесконечности. Если выбрать в качестве ξ^μ векторное поле η^μ (11.2.9), то значение Φ^H соответствующей величины Φ на горизонте событий называется *электрическим потенциалом* черной дыры. Покажем, что Φ^H постоянно на горизонте. С этой целью заметим, что условие

$$T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = 0,$$

которое, согласно (6.2.2), выполняется на поверхности произвольной стационарной черной дыры ($l^\mu = \eta^\mu|_H$), для электромагнитного поля эквивалентно соотношению

$$\left(F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) l^\mu l^\nu \equiv E^\alpha E_\alpha = 0,$$

т.е. на поверхности горизонта

$$\Phi_{;\mu} = E_\mu = 4\pi\sigma l_\mu,$$

где величина σ в случае керр-ньюменовской черной дыры совпадает с "по-

верхностной плотностью заряда", введенной в гл. 7 [ср. с формулой (7.3.1)]. Отсюда вытекает, что для любого вектора χ^μ , касательного к поверхности горизонта, имеет место равенство

$$\chi^\mu \Phi^H_{, \mu} = 0,$$

что означает постоянство электрического потенциала Φ^H на горизонте событий *).

Доказанное выше свойство постоянства величин Ω^H , κ и Φ^H на горизонте событий стационарной черной дыры оказывается существенным при выводе так называемой *массовой формулы*. Эта формула устанавливает связь наблюдаемой на бесконечности массы черной дыры с геометрическими характеристиками поверхности ее горизонта событий. А именно, Бардин и др. (1973) показали, что в стационарном аксиально-симметричном асимптотически плоском пространстве-времени наблюдаемая на бесконечности масса черной дыры M^∞ может быть записана в следующем виде:

$$M^\infty = - \int_{\Sigma} (2T^\mu_\nu - T\delta^\mu_\nu) \xi^\nu_{(t)} d\sigma_\mu + 2\Omega^H J^H + \frac{\kappa}{4\pi} A, \quad (11.2.30)$$

где Ω^H — угловая скорость, J^H — угловой момент, κ — поверхностная гравитация, A — площадь поверхности черной дыры, а T^μ_ν — полный тензор энергии-импульса стационарного аксиально-симметричного распределения вещества и полей вне черной дыры. Интегрирование ведется по пространственноподобной асимптотически плоской поверхности, пересекающей горизонт событий по некоторой двумерной поверхности $\partial\mathcal{B}$. Поверхность выбрана так, что $\xi^\mu_{(r)}$ являются касательными к этой поверхности, а на асимптотической бесконечности Σ ортогональна $\xi^\mu_{(t)}$.

Доказательство формулы (11.2.30) проводится следующим образом [Бардин и др. (1973)]. Для произвольного векторного поля Киллинга ξ^μ

$$\xi_{\mu;\nu} = \xi_{[\mu;\nu]}, \quad (11.2.31)$$

$$\xi^{\mu;\nu}_{;\nu} = -R^\mu_\nu \xi^\nu. \quad (11.2.32)$$

(Последнее из этих соотношений может быть получено сверткой (П.15) по α и β). Выбирая $\xi^\mu_{(t)}$ в качестве ξ^μ , интегрируя (11.2.32) по поверхности Σ и используя теорему Стокса [см. (П. 33)], имеем

$$\int_{\partial\Sigma} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} d\sigma_{\mu\nu} = - \int_{\Sigma} R^\mu_\nu \xi^\nu_{(t)} d\sigma_\mu, \quad (11.2.33)$$

где $d\sigma_{\mu\nu}$ и $d\sigma_\mu$ — элементы поверхностей $\partial\Sigma$ и Σ соответственно. При описанном выше способе выбора поверхности Σ ее граница $\partial\Sigma$ состоит из

*) При описании заряженной вращающейся черной дыры в рамках 5-мерной теории гравитации Калуцы — Клейна величины Ω^H и Φ^H входят в выражения сходным образом и их свойства в известной мере аналогичны [Блейер и др. (1985)].

Рис. 83. Пространство-время стационарной черной дыры (иллюстрация к выводу массовой формулы)

границы черной дыры $\partial\mathcal{B}$ и двумерной поверхности $\partial\Sigma_\infty$ на пространственной бесконечности (рис. 83).

Покажем, что масса M^∞ черной дыры, измеренная удаленным наблюдателем в асимптотически плоской области по ее воздействию на пробные частицы, дается следующим выражением:

$$M^\infty = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} \xi_{(t)}^{\mu;\nu} d\sigma_{\mu\nu}. \quad (11.2.34)$$

Для этого предположим, что вдали от черной дыры покоится пробное тело. Тогда 4-ускорение этого тела равно

$$a^\mu = \frac{\xi_{(t)}^\nu \xi_{(t)}^\mu}{-\xi_{(t)}^\alpha \xi_{(t)\alpha}}. \quad (11.2.35)$$

Пусть Σ — пространственноподобная поверхность, ортогональная в асимптотической области вектору $u^\mu = \xi^\mu / |\xi_\alpha \xi^\alpha|^{1/2}$ 4-скорости тела. В этой области гравитационное поле является слабым и легко устанавливается связь его инвариантных 4-мерных характеристик с ньютоновским описанием. В частности, вектор $a^\mu \approx u^\nu \xi_{(t)}^\mu$, лежащий в Σ , имеет три существенные компоненты. В ньютоновской теории этот трехмерный вектор характеризует напряженность гравитационного поля и связан с потенциалом φ соотношением $a_i = \varphi_{,i}$. По теореме Гаусса, поток этого вектора через любую замкнутую двумерную поверхность $\partial\Sigma_\infty$ (лежащую в Σ), охватывающую тяготеющее тело, равен $4\pi M^\infty$, где M^∞ — масса тела. Пусть $\tilde{n}^\mu$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Sigma_\infty$, лежащий в Σ . Тогда

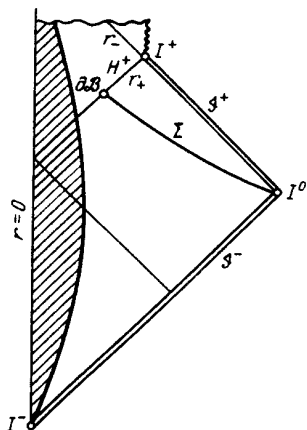
$$M^\infty = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} \xi_{(t)}^{\mu;\nu} \tilde{n}_\mu u_\nu d^2\sigma, \quad (11.2.36)$$

где $d^2\sigma$ — элемент площади $\partial\Sigma_\infty$. Используя свойство (11.2.31), можно выражение $\tilde{n}_\mu u_\nu d^2\sigma$ заменить на $d\sigma_{\mu\nu} = \tilde{n}_{[\mu} u_{\nu]} d^2\sigma$; при этом соотношение (11.2.36) приводится к виду (11.2.34).

Аналогичным образом можно показать, что полный угловой момент J^∞ системы, измеренный удаленным наблюдателем (например, по эффекту увлечения Ленсе — Тирринга), дается следующим выражением*):

$$J^\infty = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma_\infty} \xi_{(\varphi)}^{\mu;\nu} d\sigma_{\mu\nu}. \quad (11.2.37)$$

*) В справедливости формул (11.2.34) и (11.2.37) для массы M и углового момента J можно убедиться непосредственной проверкой, если учесть, что вдали от тяго-



Используя соотношение (11.2.33) и аналогичное соотношение для $\xi_{(\varphi)}^\mu$, можно с учетом (11.2.34) и (11.2.37) получить

$$M^\infty = - \int_{\Sigma} (2T_\nu^\mu - T_\alpha^\alpha \delta_\nu^\mu) \xi_{(t)}^\nu d\sigma_\mu + M^H, \quad (11.2.38)$$

$$J^\infty = \int_{\Sigma} T_\nu^\mu \xi_{(\varphi)}^\mu d\sigma_\mu + J^H, \quad (11.2.39)$$

где интегралы в правых частях описывают вклад вещества и полей вне черной дыры в полные массу M^∞ и угловой момент J^∞ системы, а

$$M^H = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{B}} \xi_{(t)}^{\mu;\nu} d\sigma_{\mu\nu} \quad (11.2.40)$$

и

$$J^H = - \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{B}} \xi_{(\varphi)}^{\mu;\nu} d\sigma_{\mu\nu} \quad (11.2.41)$$

— вклады в M^∞ и J^∞ массы и углового момента самой черной дыры *).

Выражение для M^H можно преобразовать следующим образом. Выразим $\xi_{(t)}^\mu$ с помощью (11.2.9) через η^μ и $\xi_{(\varphi)}^\mu$. Тогда имеем

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \xi_{(t)}^{\mu;\nu} d\sigma_{\mu\nu} = 8\pi J^H \Omega^H + \int_{\partial\mathcal{B}} l^{\mu;\nu} d\sigma_{\mu\nu}, \quad (11.2.42)$$

где $l^\mu = \eta^\mu|_H$. Если векторы m^μ и $\bar{m}^\mu$ введенной выше комплексной световой тетрады лежат в плоскости, касательной к $\partial\mathcal{B}$, то $d\sigma_{\mu\nu} = l_{[\mu} n_{\nu]} dA$, где dA — элемент площади двумерной поверхности $\partial\mathcal{B}$. Используя определение (11.2.11) поверхностной гравитации κ и ее постоянство, интеграл в правой части (11.2.42) можно записать в виде $\int_{\partial\mathcal{B}} l^{\mu;\nu} d\sigma_{\mu\nu} = \kappa A$, где $A = \int_{\partial\mathcal{B}} dA$ — полная площадь поверхности черной дыры. Используя это равенство и подставляя (11.2.42) в (11.2.38), получаем массовую формулу (11.2.30).

текущего вращающегося тела метрика может быть записана в следующем виде:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M}{r} + O(r^{-2}) \right] dt^2 - \left[\frac{4J}{r} \sin^2 \theta + O(r^{-2}) \right] dt d\varphi + \\ + (1 + O(r^{-1})) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

*) Подчеркнем, что используемое нами значение (П.28) для элемента поверхности $d\sigma_{\mu\nu}$ согласуется с принятым в работах Бардина, Картера, Хокинга (1973) и Картера (1973а) и вдвое меньше принятого в работах Картера (1979) и Ламура (1982). Отметим также, что ориентация $d\sigma_{\mu\nu}$ на поверхностях $\partial\Sigma_\infty$ и $\partial\mathcal{B}$ выбрана таким образом, что

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} = \int_{\partial\Sigma_\infty} \varphi^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} - \int_{\partial\mathcal{B}} \varphi^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}.$$

Напомним, что в этой формуле T_ν^μ — полный тензор энергии-импульса вещества и полей вне черной дыры. При наличии электромагнитного поля он складывается из двух частей: $T_\nu^{(m)\mu}$ — тензора энергии-импульса вещества и $T_\nu^{(em)\mu}$ — тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Используя выражение (П.48) для $T_\nu^{(em)\mu}$, формулу (11.2.30) можно преобразовать к следующему виду [Картер (1973а, 1979)]:

$$M^\infty = - \int_\Sigma (2 T_\nu^{(m)\mu} - T_\alpha^{(m)\alpha} \delta_\nu^\mu) \xi_{(t)}^\nu d\sigma_\mu + \tilde{M}^H + M_{\text{ext}}^{(em)}, \quad (11.2.43)$$

где $M_{\text{ext}}^{(em)}$ — вклад в полную массу, связанный с наличием вне черной дыры тока j^μ :

$$M_{\text{ext}}^{(em)} = \int_\Sigma [-2 \xi_{(t)}^\nu A_\nu j^\mu + j^\nu A_\nu \xi_{(t)}^\mu] d\sigma_\mu, \quad (11.2.44)$$

$\tilde{M}^H$ — масса черной дыры с учетом энергии ее электромагнитного поля:

$$\tilde{M}^H = 2\Omega^H \tilde{J}^H + \Phi^H Q + \frac{\kappa}{8\pi} A. \quad (11.2.45)$$

Здесь

$$\tilde{J}^H = J^H + J^{(em)H}, \quad (11.2.46)$$

$$J^{(em)H} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{B}} \xi_{(\varphi)}^\alpha A_\alpha F^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}, \quad (11.2.47)$$

а $Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{B}} F^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu}$ — электрический заряд черной дыры.

В приведенных формулах A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, убывающий на бесконечности и удовлетворяющий соотношениям $\mathcal{L}_{\xi_{(t)}} A_\mu = \mathcal{L}_{\xi_{(\varphi)}} A_\mu = 0^*$. В отсутствие вещества и токов вне черной дыры ее масса M^∞ совпадает с $\tilde{M}^H$. Соотношение (11.2.45) для изолированной черной дыры было получено Смарром (1973а).

Интегральная массовая формула (11.2.30) позволяет найти разность масс δM^∞ для двух слегка отличных друг от друга статических или стационарных аксиально-симметричных конфигураций, содержащих черную дыру. Обозначим соответствующую вариацию метрики δg_μ и фиксируем калибровочный произвол $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta g_{\mu\nu} + \delta x_{\mu;\nu}$ (имеющийся в выборе этой величины) так, что $\delta \xi_{(t)}^\mu = \delta \xi_{(\varphi)}^\mu = 0$, а положение горизонта событий остается неизменным. Тогда общее выражение для вариации массы

*) В существовании калибровки, в которой выполняются эти соотношения, можно убедиться, если использовать условия $\mathcal{L}_{\xi_{(t)}} F_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\xi_{(\varphi)}} F_{\mu\nu} = 0$ стационарности и аксиальной симметрии поля $F_{\mu\nu}$.

записывается следующим образом:

$$\delta M^\infty = \Omega^H \delta J^H + \frac{\kappa}{8\pi} \delta A - \delta \int_{\Sigma} T^\mu_\nu \xi^\nu_{(t)} d\sigma_\mu - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \xi^\alpha_{(t)} d\sigma_\alpha. \quad (11.2.48)$$

Если вне черной дыры нет вещества и полей, то последние два члена в этой формуле отсутствуют и она совпадает с соотношением (11.1.3) для керровской ($Q = 0$) черной дыры.

Приведем явное выражение для изменения δM^∞ полной массы системы в случае, когда вне черной дыры вращается с локальной угловой скоростью Ω идеальная жидкость, описываемая тензором энергии-импульса $T^{(m)\mu}_\nu$, а система как до, так и после изменения ее параметров стационарна и аксиально-симметрична [Картер (1973а), Дамур (1982)]:

$$\delta M^\infty = \Omega^H \delta \tilde{J}^H + \Phi^H \delta Q + \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \delta q, \quad (11.2.49)$$

где

$$\begin{aligned} \delta q = & \int \Omega \delta (d^3 J^{(m)}) + \xi^\alpha_{(\varphi)} A_\alpha d^3 Q - \int (\xi^\alpha_{(t)} + \Omega \xi^\alpha_{(\varphi)}) A_\alpha \delta (d^3 Q) + \\ & + \int \bar{T} \delta (d^3 S^{(m)}) + \int \bar{\mu} \delta (d^3 N). \end{aligned} \quad (11.2.50)$$

Здесь $d^3 J^{(m)} = T^{(m)\mu}_\nu \xi^\nu_{(\varphi)} d\sigma_\mu$ — элемент локального углового момента вещества, $d^3 Q = j^\mu d\sigma_\mu$ — локальное распределение заряда, j^μ — электрический ток, $\bar{T} = [-(\xi_{(t)} + \Omega \xi_{(\varphi)})^2]^{1/2} T$, T — локальная температура, $d^3 S^{(m)}$ — локальное распределение энтропии вещества, $\bar{\mu} = \mu \bar{T}/T$, μ — локальный химический потенциал и $d^3 N$ — локальное распределение числа частиц.

Приведенные в этом параграфе интегральное и дифференциальное выражения для массовой формулы оказываются удобными при изучении многочисленных вопросов, связанных с процессами, приводящими к изменению параметров черной дыры. Они также относятся к числу основных соотношений, используемых при описании аналогов начал термодинамики в физике черных дыр. К рассмотрению этого вопроса мы теперь переходим.

§ 11.3. Четыре закона физики черных дыр

Согласно термодинамической аналогии в физике черных дыр следующие величины:

$$\theta = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k c}, \quad S^H = \frac{A}{4 l_{\text{Pl}}^2}, \quad E \approx M c^2 \quad (11.3.1)$$

(κ — поверхностная гравитация, A — площадь и $M \equiv M^\infty$ — масса черной дыры) выполняют роль соответственно температуры, энтропии и внутренней энергии черной дыры. В термодинамике равновесие невозможно, если температура разных частей системы различна. Наличие состояния термо-

динамического равновесия и существование температуры в термодинамике постулируются нулевым началом. В физике черных дыр справедливо аналогичное утверждение.

Нулевой закон физики черных дыр. Поверхностная гравитация κ стационарной черной дыры постоянна везде на поверхности горизонта событий.

Это утверждение в предположении о выполнимости условия энергодоминантности было доказано в предыдущем параграфе.

Приведенная выше дифференциальная массовая формула позволяет сформулировать

Первый закон физики черных дыр. Изменение массы δM системы, содержащей черную дыру, при переходе этой системы из одного стационарного состояния в другое, близкое к нему стационарное состояние дается выражением

$$\delta M = \theta \delta S^H + \Omega^H \delta \tilde{J}^H + \Phi^H \delta Q + \delta q, \quad (11.3.2)$$

где $\delta \tilde{J}^H$ и δQ — изменения полного углового момента и электрического заряда черной дыры, а δq — вклад в изменение полной массы, связанный с изменением состояния стационарного распределения вещества вне черной дыры [для идеальной жидкости δq имеет вид (11.2.50)].

При описании *классических* процессов в поле черных дыр, для которых выполняется теорема Хокинга, можно сформулировать следующий аналог второго начала термодинамики.

Второй закон физики черных дыр. Для любых классических процессов площадь поверхности черной дыры A , и, следовательно, ее энтропия S^H не убывает:

$$\delta S^H \geq 0. \quad (11.3.3)$$

В обоих случаях (в термодинамике и физике черных дыр) второе начало означает присущую системе в целом необратимость и выделяет тем самым направление времени. В термодинамике закон возрастания энтропии приводит к тому, что часть внутренней энергии, которая не может быть превращена в работу, увеличивается со временем. Совершенно аналогично закон возрастания площади черной дыры означает, что доля внутренней энергии черной дыры, которую из нее нельзя извлечь, возрастает со временем. Как и в термодинамике, величина S^H связана с невозможностью получить информацию о строении системы (в данном случае — черной дыры).

Квантовые эффекты нарушают условия применимости теоремы Хокинга. Так, при квантовом испарении черной дыры ее площадь уменьшается и неравенство (11.3.3) оказывается нарушенным. Существенно, однако, что излучение черной дыры имеет тепловой характер и сопровождается возрастанием энтропии в окружающем пространстве. Можно убедиться, что в этом процессе величина S , называемая *обобщенной энтропией* и равная сумме энтропии черной дыры S^H и энтропии вещества вне черной дыры S^m :

$$S = S^H + S^m \quad (11.3.4)$$

не убывает. Для этого заметим, что скорость (по часам удаленного наблюдателя) потери черной дырой массы и энтропии в виде излучения

безмассового поля спина s можно записать в виде

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{4} \sigma_s h_s \Sigma_s \theta^4, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{3} \sigma_s \beta_s h_s \Sigma_s \theta^3, \quad (11.3.5)$$

где h_s — число поляризаций поля, $\sigma_s = \pi^2/30$ для бозонов и $7\pi^2/240$ для фермионов, Σ_s — эффективное сечение черной дыры, θ — ее температура и β_s — безразмерный коэффициент порядка 1. С другой стороны, для невращающейся черной дыры изменение ее энтропии S^H связано с изменением массы M соотношением

$$dS^H = \theta^{-1} dM. \quad (11.3.6)$$

Сравнивая (11.3.5) и (11.3.6), находим [Зурек (1982)]

$$R \equiv \frac{dS^m}{dS^H} = \frac{4}{3} \beta_s. \quad (11.3.7)$$

Численный счет на основе формул (9.5.28) и (9.5.39а), выполненный Зурек (1982) и Пэйджем (1983), показывает, что коэффициент β всегда больше $3/4$, откуда следует, что обобщенная энтропия S в процессе излучения одиночной черной дыры возрастает. Можно показать [Зурек (1982)], что если снаружи черной дыры имеется чернотельное излучение с температурой $\tilde{\theta}$, то обобщенная энтропия по-прежнему возрастает — за исключением случая, когда $\tilde{\theta} = \theta$. В этом случае увеличение энтропии в окружающем черную дыру пространстве в точности компенсируется ростом энтропии черной дыры в результате аккреции на нее теплового излучения.

Приведенные соображения дают основания предположить, что выполняется

Обобщенный второй закон физики черных дыр. Для всех физических процессов с участием черных дыр обобщенная энтропия S , определяемая соотношением (11.3.4), не убывает *):

$$\delta S \geq 0. \quad (11.3.8)$$

Современный статус этого закона в физике черных дыр в известной мере напоминает статус второго начала термодинамики до появления статистической механики. Различные мысленные эксперименты, обсуждавшиеся в литературе, его подтверждают, однако последовательный вывод этого закона из основных принципов квантовой механики и теории гравитации пока отсутствует.

Остановимся подробнее на одном из таких мысленных экспериментов [Бекенштейн (1973b, 1974)]. Представим себе, что излучение (или вещество) с энергией E^m и энтропией S^m помещено в ящик, с непроницаемыми (зеркальными) стенками, и пусть этот ящик медленно опускается на невращающуюся черную дыру. В момент, когда нижняя часть ящика находится в непосредственной близости от поверхности черной дыры, в нем

*) Впервые в такой форме обобщенный второй закон был предложен Бекенштейном (1973b, 1974) еще до открытия квантового излучения черной дыры.

открывается крышка и все его содержимое падает в черную дыру. Затем ящик поднимается обратно.

Оценим изменение обобщенной энтропии при этом процессе. Пусть все размеры ящика, в том числе и его вертикальный размер l , малы по сравнению с r_g . В момент, когда нижняя грань ящика достигает черной дыры, верхняя его грань находится при $r = r_g + \Delta r$, где $\Delta r \approx l^2/4r_g$. Передаваемая черной дыре энергия (с учетом красного смещения) не превосходит величины

$$\epsilon = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} E^m \approx \frac{l}{2r_g} E^m,$$

а увеличение энтропии черной дыры

$$\delta S^H \lesssim \theta^{-1} \epsilon \approx 2\pi l E^m.$$

Из приведенного рассуждения следует, что обобщенная энтропия в таком процессе не убывает, если только справедливо неравенство $S^m \leq 2\pi l E^m$).

На первый взгляд, если выбрать l достаточно малым и много меньшим остальных двух размеров ящика, то открывается возможность нарушения обобщенного второго закона. Унру и Уолд (1982, 1983а) показали, что этот вывод неверен. Дело в том, что в приведенном рассмотрении не учтены эффекты, связанные с поляризацией вакуума. Учет этих эффектов существенно изменяет ситуацию.

По предположению, стенки ящика зеркальные. При медленном перемещении ящика по мере приближения к черной дыре они испытывают все большее ускорение, а ускоренное движение зеркальных границ в результате квантового эффекта порождает потоки энергии. Этот эффект хорошо известен в плоском пространстве-времени [см. Де Витт (1975), Биррел, Девис (1982)]. Физическая причина его в следующем. При отражении излучения от зеркальной границы на ней индуцируются заряды и токи. Аналогичное явление происходит и в вакууме; при этом "наведенные" нулевыми колебаниями заряды и токи флуктуируют и их средние равны нулю. Если подобное тело начинает двигаться ускоренно, то "наведенные" заряды и токи излучают. При движении плоского зеркала с возрастающим ускорением в плоском пространстве-времени по обе стороны от зеркала имеются потоки энергии, совпадающие по направлению с вектором ускорения**).

Аналогичный эффект, как показали Унру и Уолд (1982, 1983а), имеет место и при опускании на черную дыру ящика с зеркальными границами. Поскольку ускорение нижней стенки всегда больше ускорения верхней, медленное опускание ящика приводит к дополнительному положитель-

*) Относительно выполнимости этого ограничения для реальных физических систем см. Бекенштейн (1982, 1983), Унру, Уолд (1983а).

**) Для скалярного безмассового поля в двумерном пространстве-времени этот поток $T_{\mu\nu} v^\mu \frac{a^\nu}{a}$ (v^μ — 4-скорость, a^μ — 4-ускорение) равен $\frac{1}{12\pi} \frac{da}{d\tau}$ (τ — собственное время наблюдателя на поверхности зеркала).

ному потоку энергии, связанному с поляризацией вакуума стенками ящика, внутрь черной дыры. В результате величина энергии ϵ , переданной черной дыре, и связанное с ней изменение энтропии S^H будут больше и обобщенная энтропия не убывает.

Отметим, что при этом процессе излучение зеркальных стенок внутрь ящика приводит к уменьшению энергии его содержимого. Если опускается пустой ящик, то энергия, заключенная внутри него, может стать отрицательной. В точке, в которой ускорение покоящегося ящика равно a ($a \gg \kappa$), плотность энергии внутри ящика становится порядка $-\sigma T_a^4$, где $T_a = a/2\pi$ — локальная температура, измеряемая покоящимся наблюдателем в этой точке (см. § 10.3). Если теперь открыть этот ящик, то появится поток отрицательной энергии внутрь черной дыры, который прекратится, как только плотность энергии-импульса излучения в ящике станет порядка плотности энергии-импульса $\langle T_\nu^\mu \rangle$ в окрестности рассматриваемой точки ($\sim \sigma(\kappa/2\pi)^4$). Если теперь закрыть ящик и извлечь его наружу, то отдаленный наблюдатель обнаружит, что он заполнен тепловым излучением с температурой $T_a = a/2\pi$. В результате такого циклического процесса масса черной дыры слегка уменьшится, а соответствующая энергия (равная разности энергии извлеченного излучения и затраченной в данном цикле работы) может быть использована для совершения работы [Унру, Уолд (1982, 1983a)].

Повторяя цикл, можно непрерывно черпать энергию даже из холодных (массивных) черных дыр. Ограничение на допустимую мощность, получаемую в таком процессе, найдено в работе Унру и Уолда (1983b) и имеет вид $|dE/dt| \lesssim c^5/G \approx 3,6 \cdot 10^{59}$ эрг/с. Этот процесс также не нарушает обобщенного второго закона физики черных дыр.

Тот факт, что в обобщенный закон на одинаковом основании входят, казалось бы, разные по своей природе величины: S^m — характеризующая "степень беспорядка" строения физического вещества и S^H — геометрическая характеристика черной дыры, еще раз указывает на их глубокое родство. По сути дела, сама возможность такого родства заложена уже в уравнениях Эйнштейна, которые связывают физические характеристики вещества с геометрическими характеристиками пространства-времени.

Наличие связи тепловых свойств черных дыр с потерей информации об области пространства-времени внутри нее находится в согласии с общим информационным подходом к термодинамике, который был сформулирован Сцилардом (1929) и развивался многими физиками и математиками [см.: например, книги Бриллюэна (1956) и Поплавского (1981*)]. Суть этого подхода состоит в том, что существует прямая связь между недостатками информации о физической системе и величиной ее энтропии.

В черной дыре информация о состоянии сколлапсировавшего вещества "отсекается" мощными силами тяготения. Черная дыра "забывает" свою предысторию, сохраняя память только о "макроскопических" характеристиках: массе, заряде и угловом моменте. В соответствии с этим энтропия черной дыры S^H служит мерой потери информации в результате коллапса, и число различных ("микроскопических") состояний системы, коллапс которой приводит к образованию черной дыры с заданными параметрами

рами M, J, Q , должно быть пропорционально $\exp [S(M, J, Q)/k]$ [Бекенштейн (1973b, 1980), Хокинг (1976a), Уолд (1979b)]. Прямое вычисление этого числа состояний представляет собой весьма сложную и еще не решенную задачу.

Имеются и другие подходы к определению пространства микросостояний черной дыры. Мы кратко остановимся на двух из них. Йорк (1983) обратил внимание на то, что при квантовом испарении черной дыры происходит тепловое возбуждение ее гравитационных квазинормальных мод. Его предложение состоит в том, чтобы определить энтропию черной дыры как логарифм числа различных состояний возбуждения этих мод в процессе испарения черной дыры.

Зурек и Торн (1985) связывают энтропию черной дыры с логарифмом числа различных состояний, которые могут существовать в тонком поверхностном слое вне черной дыры, лежащем между горизонтом событий и "растянутым" горизонтом (см. § 7.3).

Несмотря на определенные успехи описанных выше подходов, как уже отмечалось выше, строгое микроскопическое определение энтропии черной дыры и обоснование обобщенного второго закона остаются пока нерешенными проблемами физики черных дыр.

Сформулируем, наконец, аналог третьего закона термодинамики [Бардин и др., 1973]) *).

Третий закон физики черных дыр. Температуру черной дыры невозможно обратить в нуль посредством любого конечного числа операций.

Поскольку θ обращается в нуль одновременно с κ , то это возможно лишь в том случае, когда уединенная стационарная черная дыра является экстремальной: $M^2 = a^2 + Q^2$. Невозможность за конечное число шагов с помощью физических воздействий превратить черную дыру в экстремальную тесным образом связана с невозможностью достижения состояния с $M^2 < a^2 + Q^2$, при котором появлялась бы голая сингулярность и происходило нарушение принципа "космической цензуры". Анализ конкретных примеров [см., например, Уолд (1974a)] показывает, что чем ближе состояние черной дыры к экстремальному, тем ограничительнее становятся условия возможности выполнения следующего шага.

§ 11.4. Черная дыра как термодинамическая система

Рассмотрим более подробно ситуацию, когда черная дыра окружена излучением черного тела при некоторой температуре T^{**}). Как уже отмечалось выше, если эта температура совпадает с температурой черной дыры θ , то имеет место равновесие, при котором аккреция излучения на чер-

*) Следует особо подчеркнуть, что другая формулировка третьего закона термодинамики, гласящая, что энтропия системы обращается в нуль при нулевой абсолютной температуре системы, несправедлива в случае черных дыр, поскольку площадь A остается конечной при $\kappa \rightarrow 0$.

**) Мосс (1984) указал на возможность того, что при квантовом испарении черной дыры в результате фазового перехода вокруг нее образуется "пузырь" новой фазы. При определенных условиях частицы, излучаемые черной дырой, будут отражаться от стенки пузыря и, накапливаясь внутри него, приводить к появлению вне черной дыры высокотемпературной среды.

ную дыру компенсируется хокинговским излучением дыры*). Нетрудно убедиться, что это равновесие является неустойчивым. Действительно, пусть в результате случайной флуктуации в течение некоторого интервала времени черная дыра поглотила меньше энергии, чем излучила. В этом случае ее масса слегка уменьшится, а температура θ возрастет, что приведет к дальнейшему увеличению скорости излучения и к дальнейшему уменьшению массы черной дыры. С другой стороны, флуктуация, приводящая к увеличению массы черной дыры, понизит ее температуру и темп хокинговского излучения. В этом случае лидирующим процессом станет аккреция излучения на черную дыру. Иными словами, при наличии достаточного количества излучения вокруг черной дыры возможны две ситуации: либо полное испарение черной дыры, либо неограниченный рост ее размеров**).

Указанная особенность поведения невращающихся незаряженных черных дыр непосредственно связана с тем, что их удельная теплоемкость

$$C = \theta \left(\frac{\partial S^H}{\partial \theta} \right)_{J=Q=0} \quad (11.4.1)$$

отрицательна ($C = -8\pi M^2$). Отрицательная теплоемкость означает, что уменьшение энергии системы приводит к росту ее температуры ($dE = C d\theta$). Это свойство характерно для систем с дальнедействующими силами притяжения, в частности для систем с гравитационным самодействием. Нетрудно убедиться, используя, например, теорему вириала, что уменьшение размеров системы, приводящее к уменьшению потенциальной и полной энергии, одновременно ведет к возрастанию кинетической энергии частиц системы (температуры тела).

Покажем, что если черная дыра помещена в резервуар с излучением, обладающим конечной энергией, то возможна устойчивая равновесная конфигурация. Пусть температура излучения T ; тогда его энергия E^m и энтропия S^m равны

$$E^m = \sigma VT^4, \quad S^m = \frac{4}{3} \sigma VT^3, \quad (11.4.2)$$

где V — объем резервуара,

$$\sigma = \frac{\pi^2}{15} \left(n_b + \frac{7}{8} n_f + \frac{1}{2} n_s \right), \quad (11.4.3)$$

n_b — число бозонных полей со спином, отличным от нуля, n_f — число фермионных полей и n_s — число скалярных полей (для простоты мы рассматриваем только безмассовые поля). Условие устойчивого равновесия в сис-

*) Гиббонс и Перри (1976, 1978) показали, что учет взаимодействия тепловых квантов друг с другом не изменяет этого вывода.

**) Поскольку черная дыра не может находиться в устойчивом тепловом равновесии с неограниченно большим резервуаром тепловой энергии, то для описания систем, содержащих черные дыры, нельзя использовать обычный канонический ансамбль статистической механики. При этом, однако, остается возможность описания подобных систем с помощью микроканонического ансамбля [Хокинг (1976а)].

теме, состоящей из резервуара с излучением и помещенной внутрь него черной дырой, состоит в максимальной обобщенной энтропии

$$S = S^H + S^m = 4\pi M^2 + \frac{4}{3} \sigma VT^3 \quad (11.4.4)$$

при фиксированном значении полной энергии

$$E = M + \sigma VT^4. \quad (11.4.5)$$

Используя связь $dM/dT = -4\sigma VT^3$, вытекающую из (11.4.5), можно убедиться, что экстремум S достигается при условии $T = \theta = 1/8\pi M$, означающем совпадение температуры излучения и температуры черной дыры. Это состояние равновесия устойчиво, если $d^2S/dT^2 < 0$, что эквивалентно выполнению неравенства

$$E^m < \frac{1}{4} M. \quad (11.4.6)$$

Механизм устойчивости такого равновесия следующий. Допустим, как и выше, из-за флуктуации черная дыра поглотила больше энергии, чем излучила. Ее температура, а следовательно и скорость излучения, при этом упадет. Однако из-за уменьшения количества излучения вне черной дыры понизится и скорость аккреции его на дыру. При выполнении условия (11.4.6) второй из эффеков оказывается более существенным, и, уменьшив свою массу за счет избытка излучения над аккрецией, черная дыра вернется в исходное состояние. Аналогичным образом обстоит дело и с флуктуациями, связанными с уменьшением массы черной дыры.

Условие (11.4.6) может быть переформулировано как ограничение на объем V . Обозначим

$$V_{cr} = \frac{2^{20} \pi^4}{5^5 \sigma} E^5. \quad (11.4.7)$$

Тогда, если $V > V_{cr}$, то наиболее вероятным состоянием будет тепловое излучение без всякой черной дыры. В случае обратного неравенства ($V < V_{cr}$) система содержит черную дыру, окруженную тепловым излучением при температуре $T = \theta$ [Хокинг (1976a)]. Процесс возникновения черной дыры при $V = V_{cr}$ при уменьшении объема V напоминает фазовый переход первого рода и сходен с процессом образования капли жидкости при охлаждении пара.

Для заряженной вращающейся черной дыры теплоемкость, рассчитанная с помощью формулы, аналогичной (11.4.1), имеет вид

$$C = \frac{MTS^3}{\pi J^2 + \frac{\pi}{4} Q^4 - T^2 S^3}. \quad (11.4.8)$$

Если обозначить $J^2 = \alpha M^4$ и $Q^2 = \beta M^2$, то нетрудно убедиться, что величина C изменяет знак при параметрах α и β , удовлетворяющих соотношению [Девис, (1977)]

$$\alpha^2 + 6\alpha + 4\beta - 3 = 0. \quad (11.4.9)$$

принимая в этой точке бесконечное значение. Хотя это свойство теплоем-

кости в известной мере сходно со свойством теплоемкостей обычных веществ при фазовых переходах второго рода, рождение заряженных частиц и квантовый аналог супerradiации делают затруднительным аккуратное рассмотрение физических особенностей, связанных с описанным выше поведением коэффициента удельной теплоемкости C [Девис (1977), Хут (1977), Соколовский, Мазур (1980)].

Исследованная нами в этой главе термодинамическая аналогия в физике черных дыр ограничивалась, по сути дела, *равновесной* термодинамикой (т.е. рассмотрением равновесных состояний и различных соотношений, связывающих характеристики таких состояний). Эта аналогия на самом деле шире. Ее можно проследить и для *неравновесной* термодинамики, которая описывает необратимые переходы системы из одного состояния в другое и процессы, происходящие при переходе системы в состояние термодинамического равновесия [Дамур (1979)]. Общее обсуждение проблем необратимой термодинамики черных дыр можно найти в работе Шьямы (1981). Относительно изменения энтропии черной дыры при неравновесных процессах см. Хокинг, Хартль (1972), Бекенштейн (1974), Карпер (1979).

В этой и предыдущих главах при описании черных дыр основное внимание уделялось тем их свойствам, которые доступны для изучения отдаленному наблюдателю. Прежде чем перейти к обсуждению строения пространства-времени внутри черной дыры, сделаем одно общее замечание. Исходной при рассмотрении черных дыр являлась точка зрения на них как на такие объекты, которые наделены сильным гравитационным полем и обладают важнейшим свойством: все поглощают и ничего не излучают, а горизонт событий — это нематериальная мысленная граница, отделяющая область, откуда ничто не выходит, от внешнего пространства. В процессе изучения различных физических процессов с участием черной дыры происходило постепенное расширение представлений о ней. Оказалось, что в этих процессах черная дыра до известной степени ведет себя так же, как другие реальные материальные тела, и характеризуется целым набором физических свойств. Поверхность черной дыры как бы обладает натяжением. При отсутствии внешних воздействий невращающаяся черная дыра принимает сферическую форму. Резкое воздействие вызывает в ней собственные колебания, которые затухают со временем так, как будто имеется трение (квазинормальные моды, § 3.2). Во внешнем статическом поле черная дыра деформируется как упругое тело (§ 8.5). Если черная дыра вращается, то угловая скорость вращения ее поверхности постоянна, как у твердого тела (§ 11.2). Черная дыра излучает как нагретое тело (§ 9.5), имеет определенную энтропию (§ 11.3) и подчиняется термодинамическим законам (§ 11.3). Черная дыра обладает поверхностной вязкостью. Покоящееся внешнее тело, оказывающее приливное воздействие на горизонт вращающейся черной дыры, приводит к постепенному замедлению ее вращения и возрастанию ее энтропии [Хокинг, Хартль (1972), Хартль (1973, 1974)]. В электродинамических процессах она ведет себя так, будто на ее поверхности внешнее поле индуцирует поверхностные заряды и токи, удовлетворяющие закону сохранения и законам Гаусса, Ампера и Ома, причем ее поверхностное сопротивление равно 377 Ом (§ 7.3).

Подобный подход к черной дыре как к физическому телу с определенными поверхностными свойствами нашел свое отражение в так называемом мембранном формализме, уже упоминавшемся в § 7.3. Этот формализм был сформулирован в работах Дамура (1978, 1979, 1982) и Знаека (1978) и развит на основе метода " $3 + 1$ "-расщепления пространства-времени Торном, Макдональдом (1982), Прайсом, Торном (1985) и Торном (1986) [общий обзор см. Торн и др. (1985)].

Подчеркнем, однако, еще раз: хотя подобный подход до известной степени облегчает рассмотрение различных эффектов с участием черных дыр и позволяет привлекать обычную физическую интуицию, необходимо помнить, что, конечно же, никакой материальной оболочки у черной дыры нет, а сам подход не что иное, как удобный способ описания этих объектов внешним наблюдателем.

ВНУТРЕННЯЯ СТРУКТУРА ЧЕРНЫХ ДЫР

§ 12.1. Пространство-время и физические поля
внутри шварцшильдовской черной дыры

Структура пространства-времени внутри невращающейся черной дыры была рассмотрена нами в гл. 2. Здесь мы обсудим поведение физических полей и проблему устойчивости внутренней части шварцшильдовской черной дыры с $r < r_g$, аналогично тому, как это было сделано для пространства вне черной дыры в гл. 3.

Данная задача была решена в работе Дорошкевича и Новикова (1978*). Вопрос о свойствах пространства-времени внутри черной дыры имеет принципиальное значение для проблемы гравитационного коллапса и природы сингулярности, хотя эта область и недоступна исследованию для наблюдателя, остающегося вне черной дыры. Общие теоремы о свойствах черных дыр, рассмотренные нами в гл. 5, не дают конкретного выражения для структуры пространства-времени внутри черной дыры. Иногда высказывались предположения, что под горизонтом черной дыры все радиационные поля, все возмущения нарастают, становятся нелинейными и структура метрики должна быть крайне замысловатой.

Кроме того, мы видели в § 6.5, структура аналитического продолжения решения для метрики пространства-времени внутри заряженной и вращающейся черной дыры весьма сложна и выглядит даже фантастической. Действительно ли, эта структура хоть в какой-то степени осуществляется при реальном образовании черной дыры?

В этом и следующем параграфах мы дадим ответ на поставленные вопросы. Сначала мы исследуем распространение физических полей внутри шварцшильдовской черной дыры и устойчивость ее внутренней структуры.

Рассмотрим возмущение в виде падающего в черную дыру пробного объекта, являющегося источником интересующего нас поля (скалярного, электромагнитного, гравитационного и т.д.). Нас будут интересовать свойства волновых полей много времени спустя после падения объекта в черную дыру, т.е. при стремлении к I^+ (см., например, рис. 50с) в области $T-$ (или, как мы ее еще обозначали, области II).

Такая асимптотика означает, что $t \rightarrow \infty$ при использовании координат (2.2.1). Исследование "хвостов" излучения (см. § 3.4) для внешней области R показало, что при фиксированном r радиационные моды излучений убывают по степенному закону при $t \rightarrow \infty$. Для самого горизонта $r = r_g$ это означает, что если ввести аффинный параметр V вдоль нулевых геодезических, образующих горизонт, то при $V \rightarrow \infty$ возмущения будут убывать также по степенному закону. Эволюция волнового поля в области $T-$ будет определяться уравнениями вида (3.1.1), (3.1.2) при $r < r_g$.

Соответствующий математический анализ проведен в цитированной выше работе Дорошкевича и Новикова (1978*). Результаты его следующие. Для скалярных возмущений

$$\Phi \approx D_1 t^{-2(l+1)} + D_2 t^{-(2l+3)} \ln r, \quad (12.1.1)$$

где D_1 и D_2 — константы.

Для возмущений, описываемых полями с $s \neq 0$ (в том числе и для возмущений метрики), главный член слагаемого, зависящего от r , имеет для радиационных мультиполей $l \geq s$ вид

$$\Phi_1 \approx D_3 t^{-(2l+3)} r^{-n} \quad (12.1.2)$$

(D_3 и n — постоянные).

Таким образом, при фиксированном r и $t \rightarrow \infty$ радиационные моды возмущений от внешних источников затухают и пространство-время стремится к "стационарному" состоянию, описываемому решением Шварцшильда. Ситуация аналогична рассмотренной нами в гл. 3 для внешней области черной дыры. Однако при $r < r_g$ имеются и существенные отличия.

Во-первых, при $r < r_g$ координата r играет роль временной координаты, а t — пространственной. Поэтому правильнее говорить о стремлении к состоянию, зависящему только от r , а не о стремлении к стационарному состоянию.

Во-вторых, что более существенно, при приближении к сингулярности при фиксированном t возмущения неограниченно нарастают. Общее решение вблизи сингулярности без учета квантовых эффектов было построено Белинским, Лифшицем и Халатниковым (1970*). Вблизи сингулярности уже неприменим метод малых возмущений. Граница области, где возмущения становятся уже не малыми, дается выражением ($s \neq 0$)

$$r^n \approx D_3 t^{-(2l+3)}. \quad (12.1.3)$$

Эта область стягивается к сингулярности с ростом t . Кроме этой, все более узкой при $t \rightarrow \infty$ области, решение Шварцшильда относительно малых возмущений устойчиво везде внутри черной дыры, а все радиационные моды с ростом t затухают по степенному закону.

Излучения от элементарных возмущений, возникающих в области $r < r_g$, распространяются только на конечную (малую) область внутри черной дыры, так как сигналы от них "упираются" в сингулярность. Эти возмущения никак не влияют на свойства черной дыры при $t \rightarrow \infty$.

Важнейший вывод из всего сказанного состоит в том, что решение Шварцшильда в T -области устойчиво точно так же, как и в R -области.

Несколько слов о нерадиационных мультиполях возмущений, связанных с падающими в черную дыру частицами или с самим коллапсирующим телом, порождающим черную дыру. Для электромагнитных возмущений таким мультиполем является $l = 0$ (кулоновское поле падающего заряда), для гравитационных возмущений — это $l = 0$ (поле добавочной массы) и $l = 1$ (поле момента количества движения). Перечисленные мультиполи не затухают при $t \rightarrow \infty$, известным образом нарастают при $r \rightarrow 0$, а вблизи $r = 0$ они перестраивают метрику, так как эта ситуация соответствует переходу к метрике Рейсснера — Нордстрема в случае добавления электрического заряда и к метрике Керра в случае добавления момента количества движения. Об этих метриках в связи с внутренней структурой чер-

ной дыры мы будем говорить далее, а здесь только подчеркнем, что если поправки к метрике и возмущающие поля становятся существенными достаточно близко к сингулярности $r = 0$, то они не имеют прямого физического смысла. Дело в том, что вблизи сингулярности, где кривизна пространства-времени становится больше планковской (т.е. больше $1/l_P^2$) или для квадратичного инварианта кривизны

$$R_{iklm}R^{iklm} = \frac{12r_g^2}{r^6} > \frac{1}{l_P^4} \quad (12.1.4)$$

существенны квантовые процессы, и всю область, определяемую (12.1.4), с точки зрения классической теории следует считать сингулярностью.

Нам осталось рассмотреть нерадикационные мультиполи физических полей, связанные с внешними источниками. Если они (источники) стационарны, т.е. характерное время изменения поля $t \gg r_g/c$, то, как показано в § 3.4, поля этих источников, для которых $k = 0$, свободно проникают в черную дыру сквозь потенциальный барьер. Мы предполагаем эти поля слабыми на r_g . Внутри черной дыры они, так же как и снаружи, не зависят от координаты t .

Типичные примеры, которые мы здесь обсудим, — влияние на внутреннюю структуру черной дыры внешнего стационарного квадрупольного гравитационного поля и внешнего стационарного магнитного поля, однородного вдали от черной дыры.

В § 8.5 было приведено точное решение, описывающее черную дыру во внешнем квадрупольном поле [Дорошкевич и др. (1965*)].

Выражение (8.5.34) показывает, что если параметр q , описывающий квадрупольный момент, достаточно мал, и поэтому поправки к метрике малы на $r = r_g$, то они остаются малыми везде при $r < r_g$ вплоть до сингулярности $r = 0$. Никакой неустойчивости внутри черной дыры при этом не возникает.

Рассмотрим теперь магнитное поле, однородное на пространственной бесконечности. Будем считать это поле слабым. Тогда для отличных от нуля компонент тензора электромагнитного поля имеем [Гинзбург, Озерной (1964*)]

$$F^{\theta\varphi} = \frac{B_0 \operatorname{ctg} \theta}{r^2}, \quad F^{\varphi r} = -\frac{B_0}{r} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad (12.1.5)$$

где B_0 — напряженность магнитного поля на бесконечности. Внутри черной дыры компонента $F^{\varphi r}$ описывает электрическое поле. При $r \rightarrow 0$ компоненты тензора электромагнитного поля неограниченно нарастают, что, однако, не ведет к перестройке метрики, так как компоненты тензора энергии-импульса, построенные из компонент (12.1.5), растут медленнее, чем соответствующие выражения, описывающие кривизну пространства-времени.

Еще раз отметим, что вблизи истинной математической сингулярности $r = 0$ возникает физическая сингулярность, где существенны квантово-гравитационные процессы. Кроме того, дальше от сингулярности (где кривизна еще мала) также могут возникать квантовые явления при наличии других полей, кроме гравитационного. Эти явления в некоторых случаях

существенно влияют на метрику. Они будут рассмотрены в следующих параграфах.

Наконец, в очень больших временных масштабах на метрику влияет процесс хоккингского испарения черных дыр.

§ 12.2. Неустойчивость горизонтов Коши внутри заряженной сферической черной дыры

Рассмотрим поведение малых возмущений гравитационного и электромагнитного полей внутри заряженной сферически-симметричной черной дыры.

Качественно новым обстоятельством по сравнению с черной дырой Шварцшильда является здесь наличие горизонтов Коши (см. § 6.5). На рис. 84 изображен фрагмент диаграммы Пенроуза с внутренней частью (область II) заряженной черной дыры и внешним пространством I. Если заряженная черная дыра образуется в результате коллапса заряженного тела из пространства I, то другое внешнее пространство (I' на рис. 67) отсутствует, как и в случае коллапса незаряженного сферического тела, превращающегося в черную дыру Шварцшильда (см. § 2.7). Поэтому область I' на рис. 84 не показана. Есть веские основания считать (см. § 6.5), что малые возмущения могут неограниченно нарастать в окрестности $r_{-,1}$ [Пенроуз (1968)].

Действительно, рассмотрим малое возмущение гравитационного и (или) электромагнитного поля вне черной дыры в области I. Как мы уже показали в §§ 3.4 и 4.7, "хвосты" излучения от него будут затухать во времени по степенному закону при $r = \text{const}$ из-за рассеяния на кривизне пространства-времени. Такой затухающий поток излучения будет пересекать горизонт событий r_+ и концентрироваться вдоль горизонта $r_{-,1}$ (см. рис. 84). Наблюдатель, движущийся по времениподобной мировой линии и пересекающий горизонт $r_{-,1}$, за конечное собственное время увидит это излучения вблизи $r_{-,1}$ (оно попадает в черную дыру за бесконечное время внешнего наблюдателя). При этом, когда наблюдатель приближается к $r_{-,1}$, воспринимаемое им излучение имеет бесконечное голубое смещение. Естественно ожидать, что такая концентрация энергии приведет к перестройке пространства-времени и к возникновению вместо $r_{-,1}$ истинной сингулярности пространства-времени. В то же время вдоль горизонта $r_{-,2}$ (за исключением точки D) никакой концентрации энергии не возникает, и поэтому не следует ожидать "рождения" сингулярности у $r_{-,2}$ от возмущений, возникающих в области I.

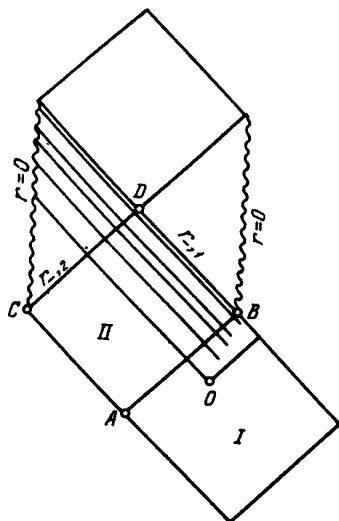


Рис. 84. Часть диаграммы Пенроуза для заряженной черной дыры с изображением распространения радиальных лучей непосредственно от вспышки (O) и после рассеяния на кривизне пространства-времени

Мы увидим, что математический анализ эволюции малых возмущений подтверждает эти интуитивные соображения.

Данная задача была проанализирована Макнамарой (1978 а, b), Гурселом и др. (1979 а, b), Метцнером и др. (1979), Чандрасекаром и Хартлем (1982). Мы будем следовать последней работе.

Метрика заряженной черной дыры имеет вид

$$ds^2 = \frac{-(r-r_+)(r-r_-)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (12.2.1)$$

Нас интересует область пространства-времени $r_- < r < r_+$. В работах Чандрасекара (1979b, 1983) и Чандрасекара и Ксантопулоса (1979) было показано, что возмущения гравитационного и электромагнитного полей заряженной черной дыры Рейсснера – Нордстрема могут быть проанализированы в терминах нормальных мод с зависимостью от времени в виде $e^{i\sigma t}$ и угловой зависимостью, описываемой соответствующими функциями Лежандра с фиксированными l и m . Возмущения разделяются на два класса: аксиальные (индекс $(+)$ вверх) и полярные (индекс $(-)$ вверх). Возмущение каждого класса может быть выражено через пару калибровочно инвариантных (в том смысле, как это описано в § 3.1) скалярных функций $Z_i^{(\pm)}(r)$ ($i = 1, 2$), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d^2 Z_i^{(\pm)}}{dr_*^2} + \sigma^2 Z_i^{(\pm)} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)}, \quad (12.2.2)$$

где

$$r_* = r + \frac{1}{2K_+} \ln |r_+ - r| - \frac{1}{2K_-} \ln |r_- - r|, \quad (12.2.3)$$

$$K_+ = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}, \quad K_- = \frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}, \quad (12.2.4)$$

$$V_i^{(-)} = \frac{\Delta}{r^5} \left[(\mu^2 + 2)r - q_j + \frac{4Q^2}{r} \right], \quad (12.2.5)$$

$$V_i^{(+)} = V_i^{(-)} + 2q_j \frac{d}{dr_*} \frac{\Delta}{r^2(\mu^2 r + q_j)}, \quad (12.2.6)$$

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = r^2 - 2Mr + Q^2, \quad \mu^2 = (l-1)(l+2), \quad (12.2.7)$$

$$q_1 = 3M + \sqrt{(9M^2 + 4Q^2\mu^2)}, \quad q_2 = 3M - \sqrt{(9M^2 + 4Q^2\mu^2)} \quad (12.2.8)$$

(в формулах (12.2.5), (12.2.6) $i, j = 1, 2$; $i \neq j$). Оказывается, что $Z_i^{(+)}$ связано с $Z_i^{(-)}$ простым алгебраическим соотношением.

Уравнения типа (12.2.2) уже встречались нам в задаче о поведении физических полей вне черной дыры (см. гл. 3). Нас интересует решение этих уравнений, описывающее прохождение и отражение падающей на $V_i^{(\pm)}$ волны. (В данном случае $V_i^{(\pm)}$ является потенциальной ямой, а не барьером, как это было для внешнего пространства черной дыры, но качествен-

но это не меняет дела.) Оказывается, что коэффициенты отражения и прохождения для $Z_i^{(+)}$ просто выражаются через соответствующие коэффициенты для $Z_i^{(-)}$.

Исследуем поведение волновых возмущений, входящих в область II через горизонт r_+ из области I (см. рис. 84). Для этой цели рассмотрим дисперсию волны, имеющей единичную амплитуду на $r = r_+$ ($r_* \rightarrow -\infty$). Решение уравнений (12.2.2) должно удовлетворять следующим граничным условиям (мы опускаем верхние и нижние индексы, так как анализ сприведлив для всех их значений):

$$Z(r_*, \sigma) \rightarrow A(\sigma)e^{-i\sigma r_*} + B(\sigma)e^{+i\sigma r_*} \quad (r_* \rightarrow +\infty, r \rightarrow r_-), \quad (12.2.10a)$$

$$Z(r_*, \sigma) \rightarrow e^{-i\sigma r_*} \quad (r_* \rightarrow -\infty, r \rightarrow r_+). \quad (12.2.10b)$$

Коэффициенты $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$, описывающие прохождение и отражение волны через $V(r_*)$, могут быть в принципе найдены стандартными методами, если известен вид $V(r_*)$ [см. (12.2.5), (12.2.6)]. Удобно ввести для анализа нулевые (световые) координаты

$$\tilde{u} = r_* + t, \quad \tilde{v} = r_* - t. \quad (12.2.11)$$

Если нанести на рис. 84 линии постоянного $\tilde{u}$ (мы не делали этого, чтобы не загромождать чертеж), то они изобразятся отрезками прямых, параллельными r_+ . Линии постоянного $\tilde{v}$ (также не показанные на рисунке) являются отрезками прямых, параллельными $r_{-,1}$. Горизонту r_+ соответствует $\tilde{u} = -\infty$, горизонту $r_{-,1}$ — $\tilde{v} = \infty$, а $r_{-,2}$ — $\tilde{u} = +\infty$. Граничные условия (12.2.10) переписываются в виде

$$Z(r_*, t) \rightarrow e^{-i\sigma \tilde{v}} + [A(\sigma) - 1] e^{-i\sigma \tilde{v}} + B(\sigma) e^{+i\sigma \tilde{u}} \quad (r_* \rightarrow \infty, r \rightarrow r_-), \quad (12.2.12)$$

$$Z(r_*, t) \rightarrow e^{-i\sigma \tilde{v}} \quad (r_* \rightarrow -\infty, r \rightarrow r_+). \quad (12.2.13)$$

Рассмотрим возмущение $Z_{\text{возм}}(\tilde{v})$, пересекающее горизонт r_+ , т.е. заданное при $u \rightarrow -\infty$. Его фурье-образ есть

$$\tilde{Z}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\text{возм}}(\tilde{v}) e^{i\sigma \tilde{v}} d\tilde{v}. \quad (12.2.14)$$

После дисперсии в области II возмущение достигнет горизонта r_- . Там его амплитуда может быть записана в виде [см. (12.2.12)]

$$Z_{\text{расс}}(r_*, t) \rightarrow X(\tilde{v}) + Y(\tilde{u}) \quad (r_* \rightarrow \infty), \quad (12.2.15)$$

где

$$X(\tilde{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}(\sigma) [A(\sigma) - 1] e^{-i\sigma \tilde{v}} d\sigma, \quad (12.2.16)$$

$$Y(\tilde{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Z}(\sigma) B(\sigma) e^{+i\sigma \tilde{u}} d\sigma. \quad (12.2.17)$$

Нас интересует поток излучения, воспринимаемый наблюдателем, пересекающим горизонт r_- . Этот поток пропорционален квадрату амплитуды

$$F = u^\alpha Z_{,\alpha} \Big|_{r \rightarrow r_-}, \quad (12.2.18)$$

где u^α — четырехмерная скорость наблюдателя. В зависимости от того, будет ли поток конечным или бесконечным, горизонт r_- будет устойчив или неустойчив (в линейном приближении) относительно малых возмущений.

Метцнер и др. (1979) и Чандрасекар (1983) показали, что на горизонте Коши величина F записывается в виде:

на $r_{-,1}$

$$F_{r_{-,1}} = \frac{2r_-^2}{r_+ - r_-} |E| \lim_{\tilde{v} \rightarrow \infty} e^{K - \tilde{v}} X_{-, \tilde{v}}; \quad (12.2.19)$$

на $r_{-,2}$

$$F_{r_{-,2}} = - \frac{2r_-^2}{r_+ - r_-} E \lim_{\tilde{u} \rightarrow \infty} e^{K - \tilde{u}} Y_{, \tilde{u}}, \quad (12.2.20)$$

где E — постоянная временная компонента ковариантной 4-скорости u_α наблюдателя. Расходимость (или конечность) выражений (12.2.19) и (12.2.20) зависит соответственно от поведения

$$e^{K - \tilde{v}} X_{-, \tilde{v}} \Big|_{\tilde{v} \rightarrow \infty} \quad \text{и} \quad e^{K - \tilde{u}} Y_{, \tilde{u}} \Big|_{\tilde{u} \rightarrow \infty}.$$

Будем предполагать, что форма возмущающего излучения $Z_{\text{возм}}(\tilde{v})$, пересекающего горизонт r_+ , удовлетворяет следующим условиям: $Z_{\text{возм}}(\tilde{v}) = 0$ при $\tilde{v} < \tilde{v}_0$ и $Z_{\text{возм}}(\tilde{v})$ при $\tilde{v} \rightarrow \infty$ стремится к нулю по крайней мере как $\tilde{v}^{-1}$. Именно этим условиям и должно удовлетворять любое реальное излучение от, например, падающего в дыру объекта или какого-либо элементарного возмущения, произошедшего в области I. Действительно, второе условие должно выполняться согласно исследованной нами в предыдущем параграфе асимптотики возмущающего излучения при $\tilde{v} \rightarrow \infty$ на горизонте незаряженной черной дыры. Наличие заряда $Q < M$ ничего не меняет в этом отношении [см., например, Бичак (1972)]. Степенное затухание "хвостов" излучения от возмущений типично практически для любого возмущения.

Первое условие заведомо выполняется, если под $\tilde{v}_0$ понимать значение аффинного параметра, соответствующего моменту, когда горизонт пересекает первый, дошедший до него луч от возмущения *).

В работе Чандрасекара и Хартля (1982) показано, что для решений уравнения (12.2.2) с любыми индексами $(\pm)$ величина $F_{r_{-,2}}$ (12.2.20) остается конечной, т.е. горизонт $r_{-,2}$ устойчив относительно малых возмущений в области I. Напротив, величина $F_{r_{-,1}}$ расходится при $\tilde{v} \rightarrow \infty$ по крайней мере как $e^{(K_- - K_+) \tilde{v}}$ или еще быстрее (скорость расходимости зависит от характера возмущения). Это означает, что с приближением к $r_{-,1}$ наблюдатель видит бесконечную плотность потока излучения.

Изложенный математический анализ полностью подтвердил интуитивные соображения Пенроуза, приведенные в начале параграфа. Заметим, что

*) При рассмотрении не "вечной" черной дыры, т.е. дыры, возникающей в результате коллапса, достаточно малые $\tilde{v}$ нас вообще не интересуют.

дисперсия волн от любого возмущения, возникшего в области II, не ведет, очевидно, к концентрации энергии вдоль $r_{-,1}$ и, следовательно, к неустойчивости горизонтов Коши. Бесконечная концентрация энергии вблизи $r_{-,1}$ от возмущений в области I должна влиять на метрику, перестраивая структуру пространства-времени. Поэтому вблизи $r_{-,1}$ метод малых возмущений уже неприменим. Можно только высказать догадку, что вместо горизонта Коши будет формироваться истинная сингулярность пространства-времени.

Сделаем еще одно замечание. Пусть вне черной дыры имеются источники постоянного внешнего поля — электромагнитного гравитационного или какого-либо другого. В случае заряженной черной дыры эти поля проникают через r_+ во внутреннюю область, как и в случае незаряженной шварцшильдовской черной дыры (см. § 12.1). Если при этом вне черной дыры поля слабы и не влияют на метрику, то и внутри черной дыры они остаются слабыми. В частности, они слабы на r_- и не ведут к каким-либо неустойчивостям [обоснование этого утверждения см. Гурсел и др. (1979b)].

§ 12.3. Неустойчивость горизонтов Коши относительно квантовоэлектродинамических процессов

В предыдущем параграфе мы рассмотрели неустойчивость горизонта Коши относительно малых внешних возмущений. Однако метод малых возмущений, которым мы пользовались, не может дать ответ на вопрос о том, как перестроится метрика под влиянием нарастающих малых возмущений и возникнет ли при этом истинная сингулярность пространства-времени.

В данном параграфе мы рассмотрим квантовые электродинамические процессы, возникающие внутри заряженной невращающейся черной дыры, которых мы не касались при анализе внутренней структуры. Будет показано, что эти процессы, приводящие к рождению электрон-позитронных пар, создают неустойчивость горизонта Коши и перестраивают структуру пространства-времени. При этом удастся построить самосогласованное решение, учитывающее влияние рожденных частиц на электромагнитное поле и метрику, и в рамках этого решения показать, как изменяется метрика и что вместо горизонта Коши действительно возникает истинная сингулярность пространства-времени. Данная задача решена в работе Новикова и Старобинского (1980*), который мы следуем в дальнейшем [см. также Березин (1980*)].

Рассмотрим ограничения, которые накладываются на физические условия внутри черной дыры с разными M и Q (рис. 85). Во-первых, черная дыра образуется только при $Q < \sqrt{GM}$ (или $Q/e < 5 \cdot 10^5 M(\text{г})$, где e — заряд электрона), т.е. для параметров ниже линии I на рис. 85. Если заряд черной дыры достаточно велик, то вблизи нее происходит рождение электрон-позитронных пар [Марков, Фролов* (1970*), Гиббонс (1975), Дамур, Руффини (1975)]. Одна частица уходит на бесконечность, вторая (противоположного по отношению к черной дыре заряда) — поглощается черной дырой, уменьшая ее заряд*), причем, как можно показать, за вре-

*) Мы рассматриваем здесь черные дыры с $r_+ > \lambda$, где $\lambda = h/mc$ — комптоновская длина волны электрона [противоположный случай см. Пэйдж (1977)].

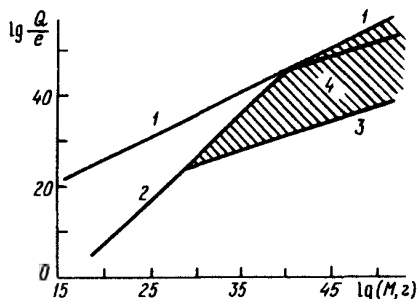


Рис. 85. Различные области значений заряда черной дыры Q и ее массы M (о границах областей см. текст)

мья r_+/c (т.е. очень быстро) он уменьшается до величины

$$Q_2 = \frac{\pi m^2 r_+^2 c^3}{eh} (\ln A - \ln \ln A)^{-1}, \quad (12.3.1)$$

где $A = e^2 (2\pi \hbar c)^{-1} (r_+/\lambda)^2$, e — заряд электрона, m — его масса. В дальнейшем заряд черной дыры остается практически постоянным.

На рис. 85 цифрой 2 обозначена линия, соответствующая уравнению (12.3.1). Область возможных значений параметров черной дыры лежит вправо и ниже линий 1 и 2.

Заметим, что при достаточно малом заряде черной дыры горизонт Коши лежит настолько близко к истинной сингулярности, что кривизна пространства-времени здесь больше критического значения, при котором существенны квантовогравитационные эффекты. Всю эту область с физической точки зрения следует считать сингулярной. Несингулярный горизонт Коши существует только в том случае, если он лежит вне этой области. Инвариант кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет размерность (длина)⁻⁴. Граница сингулярной области определяется условием $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{l_{Pl}^4}$. Для метрики Рейсснера — Нордстрема условие принадлежности r_- границе сингулярной области определяется выражением (для $r_- \ll r_+$)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{r=r_-} \approx \frac{12r_+^2}{r_-^6} = \frac{1}{l_{Pl}^4} \quad (12.3.2)$$

или

$$\frac{Q_3}{e} \approx G^{1/3} (\hbar c)^{1/6} \frac{M^{2/3}}{e} \approx 3 \cdot 10^4 M^{2/3} (\text{г}) \quad (12.3.3)$$

(линия 3 на рис. 85). На этой границе $r_- \gg l_{Pl}$. Если параметры черной дыры лежат правее и ниже линии 3, то несингулярного горизонта Коши не существует. (В естественных астрофизических условиях, когда выполняются соотношения, приведенные в начале § 4.8, для черных дыр с массой $M < 10^{60}$ г заведомо $Q < Q_3$ и в них не может быть несингулярного горизонта Коши.)

Нам остается рассмотреть область, заштрихованную на рис. 85. Для значений параметров, попавших в эту область, оказываются существенными квантовоэлектродинамические процессы внутри заряженной черной дыры.

Введем в области II метрики Рейсснера – Нордстрема следующую систему отсчета, аналогичную (2.4.9):

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(r(\tau))dx^2 + r^2(\tau)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (12.3.4)$$

где

$$\tau = - \int_r^{\infty} dr \frac{r}{[(r_+ - r)(r - r_-)]^{1/2}}, \quad (12.3.5)$$

$$a(r) = \frac{[(r_+ - r)(r - r_-)]^{1/2}}{r}. \quad (12.3.6)$$

Бывшая (при $r > r_+$) координата t теперь пространственноподобна. Обозначим ее через x ($x \equiv t$). Зависимость $a = a(\tau)$ и $r = r(\tau)$ определяется соотношениями (12.3.5) и (12.3.6). Система отсчета с метрикой (12.3.4) обладает однородным (но анизотропным!) трехмерным пространством и поэтому особенно удобна для расчетов. По координате x трехмерное пространство бесконечно ($-\infty < x < +\infty$). Такая система отсчета существует конечное собственное время. Ее эволюция начинается с момента, соответствующего значению $r = r_+$, когда начинается расширение в направлении x , описываемое $a(\tau)$. В начале расширения $a = 0$. Здесь (на $r = r_+$) имеется фиктивная (координатная) сингулярность. В трансверсальных направлениях поперечные сечения нашей системы отсчета представляют собой сферы радиуса $r(\tau)$. С течением τ происходит монотонное сжатие сфер от начального значения $r = r_+$. Расширение по x -координате с течением τ сменяется сжатием, и при $r = r_-$ величина a снова обращается в нуль, т.е. мы снова встречаемся с координатной сингулярностью. Радиус сфер в этот момент есть $r = r_-$.

В рассматриваемой системе отсчета электромагнитное поле является чисто электрическим (отлична от нуля компонента $F_{\tau x}$ электромагнитного тензора), оно направлено вдоль x и не зависит от x . С ростом τ напряженность этого поля увеличивается обратно пропорционально r^2 . Если это поле достаточно сильно, то в нем происходит рождение электрон-позитронных пар. Частицы, родившись в области II, не могут уйти из черной дыры, так как ее граница r_+ лежит в абсолютном прошлом. Поэтому они никак не влияют на свойства внешнего пространства I, но могут существенно менять ситуацию внутри черной дыры. Мы покажем, что рождающиеся частицы своим тяготением изменяют метрику в области II, что ведет к возникновению истинной сингулярности вместо горизонтов Коши.

Рассмотрим этот процесс подробнее. Выделим на рис. 85 значения параметров, где в области II ($r_- < r < r_+$) электрическое поле достигает значений $E_{cr} = \pi m^2 c^3 / e \hbar$, при которых происходит быстрое рождение электрон-позитронных пар. Напишем условие того, что электрическое поле $E = Q/r^2$ принимает критическое значение на горизонте r_- : $Q/r_-^2 = E_{cr}$. Это соотношение можно переписать в виде (считаем $Q < \sqrt{GM}$, $c = 1$)

$$\frac{Q}{e} = \left(\frac{4}{\pi} \frac{\hbar M^2}{m^2 e^2} \right)^{1/3} \approx 6 \cdot 10^{18} M^{2/3} (r) \quad (12.3.7)$$

(линия 4 на рис. 85). Условие $E > E_{\text{сг}}$ для области II выполняется при значении параметров между линиями 2, 3, 4. В рассматриваемой области $Q \ll \sqrt{GM}$, т.е. $r_- \ll r_+$. В этом случае ($r_- \ll r \ll r_+$) эволюция системы (12.3.4) происходит по закону

$$r(\tau) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} r_+^{1/3} |\tau|^{2/3}, \quad a(\tau) = \left(\frac{r_+}{r}\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \left|\frac{r_+}{\tau}\right|^{1/3}. \quad (12.3.8)$$

Электрическое поле на этой стадии еще не влияет на эволюцию метрики (она такая же, как при $Q = 0$, $r_- = 0$). Если бы решение (12.3.8) продолжалось до $\tau = 0$ (как это имеет место при $Q \equiv 0$, $E \equiv 0$), то оно приводило бы к истинной сингулярности $\tau = 0$. Электрическое поле меняется как $E = Q/r^2$ в ходе сжатия системы и в нашем случае достигает значения $E_{\text{сг}}$ на стадии (12.3.8), после чего начинается быстрое рождение пар $e^\pm$, которые разгоняются электрическим полем и создают ток. Этот ток существенным образом начинает обратно влиять на электрическое поле. Без такого влияния оно стало бы больше $E_{\text{сг}}$ и в конце концов изменило бы вид (12.3.8) при r , сравнимом с r_- , приводя к фиктивной сингулярности на горизонте Коши.

В работе Новикова и Старобинского (1980*) показано, что поле E в области II не может быть заметно больше $E_{\text{сг}}$. В противном случае возникающий, вследствие рождения пар, ток за короткое время $\tau_0 \approx 10^{-18} - 10^{-20}$ с снизил бы поле E до значения $E_{\text{сг}}$. Интересно отметить, что уменьшение величины поля происходит не монотонно, а путем колебаний с изменением знака поля и направления тока. Механизмом релаксации колебаний являются радиационные потери частиц и плазменные неустойчивости.

Итак, пока характерное время увеличения поля при сжатии системы (без эффекта рождающихся частиц) больше времени релаксации ($|\tau| > \tau_0$), электрическое поле не может сильно превышать $E_{\text{сг}}$. Вследствие этого электрическое поле не влияет на метрику. Не влияет на нее и тяготение родившихся частиц. Действительно, плотность энергии рожденных частиц, когда они движутся под действием поля вдоль оси x , растет пропорционально $a^{-2} r_-^{-2} \sim |\tau|^{-2/3}$, а после релаксации — пропорционально $(ar^2)^{-4/3} \sim |\tau|^{-4/3}$. В то же время кривизна пространства-времени растет быстрее ($\sim 1/|\tau|^2$).

Когда в ходе эволюции системы станет $|\tau| < \tau_0$, рождение частиц и их движение уже не успевают существенно влиять на электрическое поле. Поэтому при $|\tau| < \tau_0$ электрическое поле растет пропорционально r^{-2} :

$$E \approx E_{\text{сг}} (\tau_0 / |\tau|)^{4/3}. \quad (12.3.9)$$

Поле начнет влиять на метрику, когда величина $8\pi GT_0^0$ (T_0^0 — компонента тензора энергии-импульса электрического поля) станет по порядку величины равной старшим членам в уравнении Эйнштейна, описывающим кривизну пространства-времени. Эти члены порядка $1/\tau^2$. Приравнявая $8\pi GT_0^0 = GE^2 = GE_{\text{сг}}^2 (\tau_0 / |\tau|)^{8/3}$ величине $1/\tau^2$, находим

$$|\tau| = G^{3/2} E_{\text{сг}}^3 \tau_0^4. \quad (12.3.10)$$

Подставляя численные значения E_{cr} и $\tau_0 \approx 10^{-18} - 10^{-20}$ с, находим $|\tau| \approx 10^{-46} - 10^{-54}$ с $\ll \tau_{p1}$. Но мы уже говорили, что истинная физическая сингулярность лежит при $|\tau| \approx \tau_{p1}$. Значит, квантовые эффекты, влияя на электрическое поле и через него на метрику, приводят к такой перестройке метрики, что она теперь описывается выражениями (12.3.4) и (12.3.8) вплоть до $|\tau| \approx \tau_{p1}$ и вместо горизонта Коши возникает истинная сингулярность.

Подчеркнем, что мы построили самосогласованное решение, причем не методом малых возмущений, как в §§ 12.1, 12.2. Полученное решение точно описывает (разумеется, в рамках применимости теории), как возникает истинная сингулярность. Нам остается рассмотреть область параметров на рис. 85, лежащую между линиями 4 и 1.

Здесь электрическое поле везде в области II меньше E_{cr} , поэтому рождение пар не влияет заметно на него. Однако все же пары рождаются, и наличие даже небольшого их количества ведет к образованию истинной сингулярности.

Нетрудно понять качественно, как это происходит. Рождающиеся частицы разгоняются электрическим полем (причем e^+ и e^- — в противоположных направлениях), создавая электрический ток. Суммарный трехмерный импульс пучков равен нулю. Макроскопически можно считать, что плазма в целом покоится в системе отсчета (12.3.4), хотя и обладает (если не произошла релаксация потоков) резко анизотропным давлением. Мировые линии элементарных объемов плазмы совпадают с мировыми линиями системы отсчета (12.3.4); до тех пор пока мы не учитываем обратного влияния рожденных частиц на метрику. Мы видим, что в данном случае мировые линии концентрируются вдоль горизонтов Коши, подобно тому, как на рис. 84 концентрировалось излучение от возмущений в области I. Эта концентрация и приводит к возникновению истинной сингулярности.

В цитированной работе Новикова и Старобинского (1980*) построено самосогласованное решение, описывающее данную ситуацию. Тяготение родившейся плазмы начинает влиять на решение, когда r приближается к r_- . Решение (12.3.8) уже не справедливо при $r \approx r_-$. Перестроенное решение имеет вид

$$a \sim |\tau|, \quad r \sim \sqrt{\ln |\tau|}, \quad \epsilon_e \sim \frac{1}{r^2 \ln |\tau|} \gg \epsilon_{(em)}, \quad (12.3.11)$$

где ϵ_e — плотность энергии рожденных пар, $\epsilon_{(em)}$ — плотность энергии электрического поля. Решение (12.3.11) продолжается до возникновения истинной сингулярности. Таким образом, и в этом случае горизонт Коши не возникает, а образуется истинная сингулярность, причем самосогласованное решение, описывающее ее возникновение, не есть результат метода малых возмущений.

В заключение сравним неустойчивости горизонтов Коши от квантовых эффектов с классическими неустойчивостями от внешних возмущений, рассмотренных в предыдущем параграфе. Какие неустойчивости сильнее? Очевидно, что когда пары рождаются интенсивно (при $E \approx E_{cr}$) уже вдали от r_- , квантовая неустойчивость сильнее, так как перестраивает решение также вдали от r_- . Если же $E \ll E_{cr}$, то обе неустойчивости проявляются лишь в области, близкой к r_- , и классическая неустойчивость может быть сильнее.

§ 12.4. Неустойчивость горизонтов Коши внутри вращающейся черной дыры и общие замечания

В работе Новикова и Старобинского (1980a, b) приведены результаты, показывающие, что в случае вращающейся черной дыры внешние возмущения приводят к неустойчивости горизонтов Коши и возникновению вместо них истинной сингулярности, аналогично тому, как это происходит в случае заряженной черной дыры (см. § 12.2). Более того, внутри вращающейся черной дыры, вероятно, возникают квантовые эффекты, приводящие также к уничтожению горизонтов Коши и возникновению истинной сингулярности (§ 12.3).

Во всех случаях возникающая сингулярность пространственноподобна, как и в случае решения Шварцшильда. Она ограничивает область II сверху вместо горизонтов Коши.

Итак, при возникновении реальной черной дыры ее часть внутри горизонта событий по структуре будет подобна шварцшильдовской черной дыре. Продолжать решение за истинную сингулярность нельзя. Поэтому ничего подобного аналитическому продолжению решения, изображенному на рис. 67, возникнуть не может. Что касается процессов в истинной сингулярности, то их может описывать только единая квантовая теория, включающая тяготение.

ПЕРВИЧНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И КОНЕЧНАЯ СУДЬБА ЧЕРНЫХ И БЕЛЫХ ДЫР

§ 13.1. Первичные черные дыры

Черная дыра, как мы уже знаем, возникает, когда какая-либо масса сжимается до размеров меньше гравитационного радиуса (§ 2.6). В черные дыры должны превращаться звезды достаточно большой массы в конце их эволюции [Зельдович, Новиков (1971*)]. Чем меньше масса вещества, тем до большей плотности ее надо сжать, чтобы превратить в черную дыру. При больших плотностях возникают мощные силы давления, препятствующие сжатию. Поэтому в современной Вселенной возникновение черных дыр с $M \ll M_{\odot}$ невозможно. Однако в начале расширения Вселенной все вещество было в состоянии огромной плотности.

Зельдович и Новиков (1966*, 1967*), а затем Хокинг (1971a) высказали гипотезу о возможности образования черных дыр на ранних этапах космологического расширения Вселенной. Такие черные дыры получили название *первичных*. Для возникновения первичных черных дыр нужны специфические условия. Лифшиц (1946*) показал, что малые возмущения в однородной изотропной горячей Вселенной (с уравнением состояния материи $p = \epsilon/3$) не могут приводить к образованию больших неоднородностей. Горячая Вселенная устойчива относительно малых возмущений [см. Бисноватый-Коган и др. (1980)]. Для образования первичных черных дыр необходимо, чтобы в метрике, описывающей Вселенную, с самого начала расширения были большие отклонения от однородности (т.е. гравитационное поле было сильно неоднородным), хотя распределение плотности вещества по пространству было однородным при приближении к началу космологического расширения. Когда в ходе расширения Вселенной величина $l = ct$, где t – время, прошедшее с начала расширения, станет порядка линейного размера неоднородности метрики, появляется возможность образования черной дыры с массой, содержащейся к моменту t в объеме l^3 . Таким образом, возможно формирование черных дыр с массой, существенно меньшей звездных, если такие дыры возникают достаточно рано (см. далее).

Первичные черные дыры представляют особый интерес, так как квантовое испарение Хокинга существенно именно для черных дыр малой массы, а такими могут быть только первичные черные дыры *).

Мы не будем здесь касаться астрофизических аспектов проблемы [см. Новиков и др. (1979)], а остановимся только на некоторых принципиаль-

*) Заметим, что квантовое испарение массивных и даже сверхмассивных черных дыр может быть существенным для далекого будущего Вселенной.

ных положениях, связанных с возможностью образования первичных черных дыр в ранней Вселенной *). Прежде всего возникают следующие два вопроса:

1) Какovy должны быть отклонения от метрики однородной изотропной модели Вселенной, чтобы черные дыры действительно возникали?

2) Как будет происходить аккреция окружающего горячего вещества на возникшую черную дыру и как будет меняться в связи с этим ее масса?

Второй вопрос связан с тем, что уже в работе Зельдовича и Новикова (1966*) было отмечено: если установится стационарный поток газа на черную дыру, то масса ее будет катастрофически быстро расти, а если сразу же после возникновения черной дыры такая стационарная аккреция не возникнет, то в дальнейшем ею можно полностью пренебречь, так как плотность окружающего газа в расширяющейся Вселенной быстро падает.

Ответ на оба вопроса требует выполнения численного счета на ЭВМ. Соответствующие расчеты были проделаны Надежиным и др. (1977, 1978*), Новиковым и Полнаревым (1980*) для случая сферической симметрии.

Основные результаты этих расчетов состоят в следующем. Для возникновения черной дыры необходимо, чтобы безразмерная амплитуда возмущения метрики $\delta g_{\beta}^{\alpha}$ была порядка 0,75–0,9. Неопределенность ответа связана с зависимостью решения от профиля возмущения. Напомним, что пока $l = ct$ много меньше линейного размера возмущенной области, амплитуда возмущения метрики не меняется со временем. При $\delta g_{\beta}^{\alpha}$, меньших 0,75–0,9, после того как $l = ct$ становится порядка размеров возмущения, возникающие возмущения плотности превращаются в звуковые волны.

Тем самым получен ответ на первый из поставленных вопросов.

Ответ на второй вопрос выглядит так. Численный счет показывает, что уже в момент образования черной дыры ее масса составляет 10 – 15% от массы, охваченной к этому моменту масштабом $l = ct$. Это означает, что аккреция газа на возникшую черную дыру не может стать катастрофической. Расчеты подтверждают – масса черной дыры увеличивается вследствие падения в нее окружающего газа лишь незначительно. О возможном количестве первичных черных дыр во Вселенной см. Новиков и др. (1979), Карр (1983).

§ 13.2. Классическая и квантовая неустойчивости белых дыр

Решения уравнений Эйнштейна, описывающие черные и белые дыры, формально обладают рядом сходных свойств. В частности, использование симметрии этих уравнений относительно обращения времени позволяет установить связь между решениями, описывающими образование черной дыры и взрыв белой дыры. При всем этом физические свойства черных и белых дыр и, в частности, их наблюдательные проявления и характер их взаимодействия с окружающим веществом существенно отличны. В этом нет ничего удивительного, поскольку одинаковость проявлений черной и белой

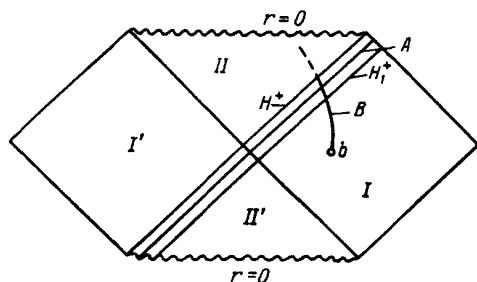
*) О возможности возникновения черных дыр во время фазовых переходов в ранней Вселенной см. Сато и др. (1981), Кодама и др. (1982), Маеда и др. (1982), Кардашев, Новиков (1982).

дыр подразумевает, что при обращении времени, переводящем их друг в друга, поведение окружающего вещества и характеристики внешнего наблюдателя не изменяются. А это не так. Наблюдатель всегда движется *вперед* по времени и получает информацию о процессах в поле дыры с помощью *запаздывающих* сигналов.

Ярким проявлением асимметрии свойств, присущих черным и белым дырам, является неустойчивость последних. К неустойчивости белых дыр могут приводить как классические процессы, связанные со взаимодействием их с окружающим веществом [Эрдли (1974), Фролов (1974*), Эрдли, Пресс (1975), Редмоунт (1984)], так и процессы, связанные с квантовым рождением частиц в их гравитационном поле [Зельдович и др. (1974*)]. В этом параграфе мы кратко остановимся на описании возможных механизмов неустойчивости белых дыр.

Начнем с неустойчивости белых дыр по отношению к падению на них обычного вещества. В чем заключается такая неустойчивость? Как это ни странно звучит — в том, что белая дыра не взорвется (вспомним ее определение). Пространство-время взрывающейся белой дыры изображено на рис. 8 и 9. Рассмотрим внешнего (т.е. при $r > r_g$) наблюдателя задолго до взрыва белой дыры. Покажем, что если в некоторый момент t_0 на белую дыру начинает падать небольшая масса вещества δM (для простоты мы рассматриваем падение тонкой сферической оболочки), то очень скоро по часам внешнего наблюдателя взрыв белой дыры становится невозможным. Вещество белой дыры, которое без аккреции извне должно было через некоторое время, расширяясь от сингулярности, выйти из-под гравитационного радиуса (как показано на рис. 8), теперь сделать этого не сможет (белая дыра не взорвется).

Рис. 86. Схема, поясняющая неустойчивость белой дыры относительно аккреции внешнего вещества на нее (см. текст)



Причина такой неустойчивости состоит в следующем.

Изобразим движение границы A взрывающейся белой дыры на диаграмме Пенроуза (рис. 86). Для простоты будем считать, что граница расширяется с ультрарелятивистской скоростью, т.е. изображается нулевой геодезической (это предположение не влияет на результат). Чем дольше задержка взрыва, тем ближе мировая линия границы A лежит к горизонту H^+ .

Пусть от точки b начинается падение массы δM на дыру (ее мировая линия изображается кривой B). Учтем обратное влияние малой массы δM на метрику. Гравитационный радиус r'_g теперь будет равен

$$r'_g = r_g + 2\delta M, \quad (13.2.1)$$

где $r_g = 2M$ — прежний гравитационный радиус. С учетом изменения метрики мировая линия горизонта есть H_1^+ *).

Теперь совершенно ясно, что если мировая линия A оказывается левее H_1^+ — нового горизонта, то вещество белой дыры никогда не выйдет из-под горизонта в область I к внешнему наблюдателю (белая дыра никогда не взорвется).

Сделаем некоторые оценки (по порядку величины). Если, двигаясь по невозмущенному пространству-времени (т.е. описываемому невозмущенными r и t), масса δM окажется ближе к r_g , чем возмущенный горизонт r_g' , то взрыв белой дыры окажется невозможным. Из формулы (2.3.3) следует, что при падении массы δM с расстояния r , равного нескольким r_g , про-

должительность падения $\Delta t = t - t_0 \approx \frac{r_g}{c} \ln \frac{r_g}{r - r_g}$. Подставляя вместо r величину r_g' из формулы (13.2.1), получаем оценку для промежутка Δt , после которого взрыв белой дыры становится невозможным:

$$\Delta t \approx \frac{r_g}{c} \ln \frac{M}{\delta M}. \quad (13.2.2)$$

Ясно, что даже при ничтожных δM белая дыра сохраняет возможность взорваться только в течение короткого промежутка времени.

Аккреция вещества на белые дыры делает их неустойчивыми и приводит к превращению их в разновидность черных дыр. Поэтому вопрос о судьбе подобных белых дыр должен рассматриваться вместе с вопросом о судьбе черных дыр. К этой ситуации мы вернемся в следующем параграфе.

Фроловым (1974*) проанализировано изменение движения расширяющегося вещества белой дыры при его столкновении с материей в T_+ -области (области II' на рис. 86).

Перейдем теперь к рассмотрению квантовой неустойчивости белой дыры [Зельдович и др. (1974*)]. Эта неустойчивость связана с тем, что частицы, интенсивно рождаются вблизи шварцшильдовской сингулярности белой дыры, движутся наружу в T_+ -области, могут (вследствие этого) интенсивно влиять на метрику вдали от сингулярности, а также могут выходить из-под гравитационного радиуса, уменьшая массу белой дыры.

Оказывается, что все изменения, связанные с родившимися в белой дыре частицами, препятствуют взрыву задержавшегося ядра.

Наконец, еще один аспект проблемы связан с тем, что белая дыра должна существовать не в пустоте, а с самого начала расширения Вселенной. Это означает, что на ранних стадиях космологического расширения окружающее вещество активно взаимодействовало с белой дырой и с родившимися в ней частицами.

Начнем с анализа квантового рождения частиц в окрестности шварцшильдовской сингулярности в T_+ -области. Рассмотрим "вечную" белую дыру (см. § 2.7). Сингулярность в ней пространственноподобна и однородна. Поэтому центры масс каждого элемента объема родившихся частиц

) Чтобы не загромождать рисунок, не показан сдвиг I^ и других линий из-за изменения метрики.

должны покоиться в системе отсчета с однородным пространством. Общий вид такой системы отсчета (с учетом влияния родившихся частиц на метрику) для сферически-симметричного случая есть [Новиков (1964b*)]

$$ds^2 = -dt^2 + e^\lambda dR^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (13.2.3)$$

где λ и r — функция только от t .

Выберем t так, что сингулярность соответствует $t = 0$. При $t \rightarrow 0$

$$r \propto t^{2/3}, \quad e^\lambda \propto t^{-2/3}. \quad (13.2.4)$$

Рождение частиц в такой метрике происходит вблизи сингулярности, вероятно, при $t \approx t_{p1}$ [Зельдович, Старобинский (1971*)]. Плотность энергии родившихся частиц при этом

$$\epsilon_{p1} \approx \frac{1}{Gt_{p1}^2}. \quad (13.2.5)$$

После t_{p1} скорость рождения частиц резко падает, и им можно пренебречь. В дальнейшем плотность убывает вследствие расширения объема. Для расчета эволюции системы надо знать уравнение состояния родившейся материи. В работе Зельдовича и др. (1974*) построены модели для разных уравнений состояния. Не все эти модели реалистичны, но они обладают рядом общих свойств, отражающих особенности задачи, а в некоторых случаях позволяют решить задачу до конца.

Простейшее (нереалистическое) предположение состоит в том, что предполагается равным нулю давление родившихся частиц ($p = 0$). Решение записывается в параметрическом виде

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} r_g (1 - \cos \xi), \\ e^{\lambda/2} &= \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} + \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} \right), \\ t &= \frac{1}{2} r_g (\xi - \sin \xi), \\ 8\pi G\epsilon &= \alpha r^{-2} e^{-\lambda/2}, \end{aligned} \quad (13.2.6)$$

где $\alpha \approx \frac{r_g}{r_{p1}} \gg 1$, $0 \leq \xi \leq 2\pi$, $-\infty < R < \infty$. Решение описывает однородное расширение массы родившихся частиц от момента $t \approx t_{p1}$ до момента t_1 , когда $r = r_g$ и плотность энергии $\epsilon = (8\pi G r_g^2)^{-1}$, а затем последующее сжатие материи к сингулярности.

Чтобы прояснить физический смысл решения, потребуем выполнения следующего условия: рождение частиц имеет место вблизи $t \approx t_{p1}$ на участке R от $-\infty$ до некоторого R_1 , а при $R > R_1$ рождение частиц отсутствует. (Мы увидим в дальнейшем, как такое предположение сделать реалистичным.) Тогда структура пространства-времени имеет вид, изображенный на рис. 87. Вся масса рожденных частиц находится под гравитационным радиусом и не выходит из белой дыры.

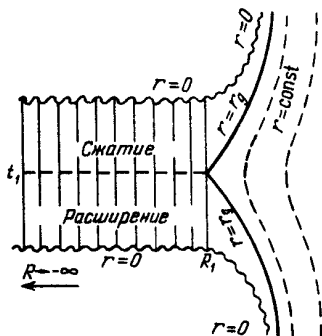


Рис. 87. Схема расширения и сжатия вещества с $p = 0$ внутри белой дыры, родившегося из-за квантовых процессов вблизи $r = 0$ левее R_1

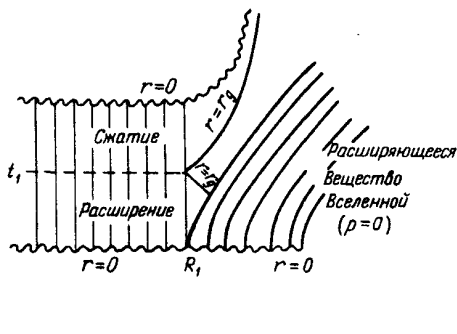


Рис. 88. Белая дыра с родившимся веществом ($p = 0$) в холодной модели Вселенной (с веществом, для которого также $p = 0$)

Предположим теперь, что мы рассматриваем не "вечную" белую дыру, а белую дыру с задержавшимся в расширении ядром. Легко показать, что родившиеся вблизи шварцшильдовской сингулярности частицы не позволят такому ядру выйти из-под гравитационного радиуса.

Действительно, длительная задержка расширения ядра соответствует тому, что его граница должна лежать при $R = R_2$ в момент $t \approx t_{p1}$ (вблизи $r = 0$) далеко слева от точки R_1 ($R_2 \ll R_1$). Сигнал, вышедший из R_2 в момент t_{p1} и идущий направо к R_1 , успевает пройти за все время расширения t_1 только конечное расстояние ΔR . Оценка показывает, что

$$\Delta R \approx 7r_{p1} \ll r_g. \quad (13.2.7)$$

Если $R_1 - R_2 \gg \Delta R$, то сигнал не успеет дойти до R_1 к моменту окончания расширения t_1 . Поэтому взорвавшееся вещество задержавшегося ядра не только само не сможет выйти к внешнему наблюдателю, но и никакие сигналы от этого взрыва не дойдут до R_1 и не выйдут из белой дыры. Задержавшееся ядро будет погребено под массой родившихся частиц.

Теперь обсудим предположение об отсутствии рождения частиц вблизи $r = 0$ правее координаты R_1 . Надо помнить, что белая дыра находится не просто в пустом пространстве, а в расширяющейся Вселенной [Новиков (1964*^b), Нееман (1965)]. Если правее точки R_1 вблизи $r = 0$ расположено окружающее белую дыру вещество однородной космологической модели, то рождение частиц в этой области практически отсутствует [при стандартных предположениях; см. Зельдович, Старобинский (1971*)]. Если при этом считать, что и в окружающем веществе нет давления (что нереалистично), то оно вообще никак не влияет на область левее R_1 . Структура пространства-времени в такой модели показана на рис. 88.

Перейдем теперь к более реалистическим моделям.

Предположим, что родившиеся частицы не взаимодействуют друг с другом и представляют собой два встречных потока, движущиеся вдоль радиальной координаты со скоростью света. В этом случае $-T^0_0 = T^1_1 = \epsilon$, остальные $T^k_i = 0$. Другое предположение состоит в том, что из-за взаимодействия

релятивистских родившихся частиц возникает паскалевское давление $p = \epsilon/3$. Решения для этих случаев аналогичны (13.2.6) для случая $p = 0$; см. Зельдович и др. (1974*). Они также описывают расширение системы до некоторого $r_{\max}$ и последующее сжатие к сингулярности. Здесь опять сигнал, идущий со скоростью света, проходит вдоль R конечное небольшое расстояние за все время расширения системы. Поэтому, если имеется задержавшееся в расширении ядро, то родившиеся частицы (как и в случае $p = 0$) не дадут ему, взорвавшись, расшириться к внешнему наблюдателю. Существенное отличие по сравнению со случаем $p = 0$ состоит в том, что при $T_1^1 \neq 0$ возникает поток материи через границу R_1 направо. Этот поток может выходить из-под r_g , уменьшая массу белой дыры.

Если такая белая дыра находится в холодной Вселенной с веществом, для которого $p = 0$, то, как показано в уже цитированной работе Зельдовича и др. (1974*), уменьшение массы белой дыры из-за спонтанного истечения родившегося вещества из дыры может быть весьма существенным.

Однако, если рассматривать белую дыру в реальной горячей Вселенной с материей и уравнением состояния $p = \epsilon/3$, то ситуация меняется. Давление окружающего горячего вещества сдерживает истечение из белой дыры родившегося вещества, и, вероятно, потери массы из-за истечения при этом заметно меньше. Мы не будем подробно исследовать данную ситуацию, так как это скорее проблема космологии (об аккреции вещества на компактные ядра в горячей Вселенной см. § 13.1).

§ 13.3. Что остается при квантовом распаде черной дыры?

К сожалению, однозначно ответить на этот вопрос в настоящее время не представляется возможным. Дело в том, что при попытке решения этого вопроса мы неизбежно и в полной мере сталкиваемся с проблемами, относящимися к компетенции квантовой гравитации. Поскольку сама теория квантовой гравитации еще, по-видимому, далека от своего завершения, а присущие ей трудности (расходимости, неперенормируемость, неоднозначность выхода за массовую поверхность, учет возможных изменений топологии пространства-времени) имеют фундаментальный характер, то все это приводит к тому, что полная самосогласованная квантовая теория испаряющихся черных дыр пока отсутствует. В этой ситуации естественным является подход, при котором исследуются модели, отражающие те или иные стороны полной задачи.

Мы ограничимся рассмотрением сферически-симметричного случая*). Соответствующую усредненную метрику $g_{\mu\nu} = \langle \hat{g}_{\mu\nu} \rangle$ удобно записать в виде [Бардин (1981)]

$$ds^2 = -e^{2\psi} F dv^2 + 2e^{\psi} dr dv + r^2 d\omega^2. \quad (13.3.1)$$

Здесь v — световая координата опережающего времени, а ψ и F — функции

*) Теорема о "выпадении волос" вблизи сингулярности внутри черной дыры (см. § 12.1), согласно которой при удалении от коллапсирующего невращающегося тела пространство-время в T_- -области все в большей степени приближается к сферически-симметричному, дает основание считать, что выводы, полученные для сферически-симметричных черных дыр, могут иметь значение и для более общих ситуаций.

от r и v , имеющие следующий инвариантный смысл:

$$F(r, v) \equiv g^{\mu\nu} r_{,\mu} r_{,\nu}, \quad e^{-\psi}(r, v) = g^{\mu\nu} r_{,\mu} v_{,\nu}. \quad (13.3.2)$$

Будем считать пространство-время асимптотически плоским и потребуем, чтобы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r, v) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r, v) = 0. \quad (13.3.3)$$

Конечно, само описание геометрии с помощью усредненной метрики $g_{\mu\nu} = \langle \hat{g}_{\mu\nu} \rangle$ имеет ограниченную область применимости. В частности, оно неприменимо на масштабах, меньших l_{p1} , из-за сильных квантовых флуктуаций гравитационного поля. Мы вернемся к обсуждению вопроса о возможной роли флуктуаций ($r < l_{p1}$) позднее, а пока остановимся на некоторых общих свойствах усредненной метрики.

Существенную информацию о свойствах рассматриваемого пространства-времени можно получить, изучая поведение поверхности уровня $F = \text{const}$ функции F . В частности, внешняя часть поверхности $F = 0$ совпадает с горизонтом видимости. Если бы образовавшаяся черная дыра была статической, то горизонт видимости совпадал бы с горизонтом событий и поверхность $F = 0$ описывалась бы уравнением $r = 2M$, где M — масса образовавшейся черной дыры. Квантовое испарение дыры приводит к тому, что горизонт видимости нестатичен и размер его уменьшается со временем (кривая BC на рис. 89). Если $r = \rho(v)$ — уравнение выходящих радиальных световых лучей, то на поверхности уровня $F = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dv} &= e^{\psi} F = 0, \\ \frac{d^2\rho}{dv^2} &= (e^{\psi} F)_{,v}. \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

В частности, на участке BC $d^2\rho/dv^2 > 0$.

Используя выражение (13.3.1) для метрики, можно вычислить соответствующий тензор Риччи и убедиться, что эта метрика в общем случае удовлетворяет уравнениям Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (13.3.5)$$

с отличной от нуля правой частью. В частности,

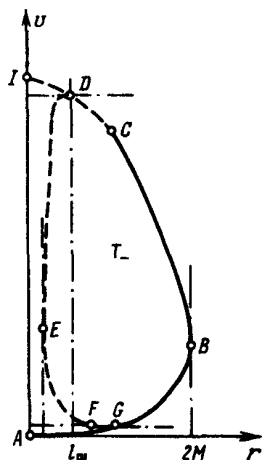
$$T_{vv} = \frac{1}{8\pi r} \left\{ e^{\psi} F \left[\frac{e^{\psi}}{r} \partial_r(r(1-F)) + \psi_{,v} \right] - (e^{\psi} F)_{,v} \right\}. \quad (13.3.6)$$

На поверхности уровня $F = 0$ (на горизонте видимости) это соотношение упрощается и принимает вид

$$T_{vv} \big|_{F=0} = -\frac{1}{8\pi r} (e^{\psi} F)_{,v} \big|_{F=0} = -\frac{1}{8\pi r} \frac{d^2\rho}{dv^2} \bigg|_{F=0}. \quad (13.3.7)$$

Поэтому на участке BC имеется поток отрицательной плотности энергии через горизонт видимости, что находится в полном соответствии с результатами, изложенными в гл. 10.

Рис. 89. Возможные варианты поведения горизонта видимости при квантовом испарении черной дыры



На всем интервале времени v , в течение которого масса черной дыры $m(v)$ (в качестве которой можно выбрать величину $m(v) = r/2|_{F=0}$) значительно превосходит планковскую m_{P1} , скорость изменения размера горизонта видимости со временем $d(r|_{F=0})/dv$ мала по сравнению со скоростью света, и для описания процессов вблизи горизонта можно использовать *квазистатическое приближение* [Гайчек, Израэль (1980), Бардин (1981), Фролов (1981), Нитьянанда, Нараян (1981)]*).

Последний этап испарения, на котором масса черной дыры становится сравнимой с планковской, является наиболее трудным для описания. На этом этапе кривизна пространства-времени вблизи горизонта видимости может достигать величины $1/l_{P1}^2$, и для нахождения усредненной метрики требуется знание эффективного действия с учетом, вообще говоря, всех квантовых поправок. В общем случае можно утверждать, что если поверхность $F = 0$ пересекает $r = 0$, то возникает сингулярность, связанная с обращением в бесконечность инвариантов кривизны [Фролов, Вилковский (1979, 1981), Кодама (1979, 1980)].

В принципе имеется возможность избежать появления голой сингулярности, если предположить, что поверхность $F = 0$ является замкнутой и нигде не пересекает линии $r = 0$ (линия BCDEFG на рис. 89). В этом случае отсутствует также и сингулярность внутри черной дыры**). Такая возможность обсуждалась в работах Фролова, Вилковского (1979, 1981, 1982), Томбулиса (1980), Хаслачера, Моттолы (1981). Для этого решения пространство-время вблизи $r = 0$ является локально плоским, и можно ожидать, что оно обладает при $r \lesssim l_{P1}$ значением кривизны порядка l_{P1}^{-2} , а внутренняя часть линии $F = 0$ (FED) отстоит от $r = 0$ на расстояние порядка l_{P1} . Используя общее соотношение (13.3.7), можно убедиться, что $T_{vv} < 0$ на участке EDB и $T_{vv} \geq 0$ на участке EFGB, где E и B — точки касания $F = 0$ линий $r = \text{const}$ [Роман, Бергман (1983)].

Пространство-время с замкнутым горизонтом $F = 0$ не обладает горизонтом событий, и в этой ситуации, строго говоря, черная дыра отсутствует.

) Отдельные вопросы, связанные с изучением геометрии испаряющихся черных дыр, помимо перечисленных работ см. также Волович и др. (1976), Хискок (1981), Бальбинот, Бергамини (1982), Бальбинот и др. (1982), Бальбинот (1984а), Курода (1984).

**) Напомним, что вследствие квантовых эффектов полный эффективный тензор энергии-импульса в уравнении Эйнштейна не удовлетворяет, вообще говоря, условиям положительности плотности энергии и давления. Поэтому учет квантовых эффектов может приводить к нарушению условий теорем о сингулярности внутри черных дыр (см. § 5.6) и сингулярности могут отсутствовать.

Однако в течение всего времени квантового испарения существует область, откуда сигналы не могут выйти наружу, и если начальная масса такого объекта много больше планковской, то длительное время все его проявления неотличимы от проявлений черной дыры.

При рассмотрении описанной модели "черной дыры" без сингулярностей возникает ряд фундаментальных вопросов. Один из них – это вопрос, связанный с сохранением барионного заряда в такой системе. Предположим, что коллапсирующая система обладает значительным барионным зарядом. В процессе квантового испарения из-за симметрии рождения барионов и антибарионов*) барионный заряд, содержащийся внутри системы, не может существенно измениться. С другой стороны, если эта "черная дыра" испаряется полностью, то после ее испарения исходный барионный заряд исчезает. В результате мы сталкиваемся с явным нарушением закона сохранения барионного заряда.

Описанная ситуация могла бы рассматриваться как трудность модели, если бы не существовали процессы, не сохраняющие барионный заряд. К числу таких процессов, широко обсуждаемых в настоящее время в связи с теориями Великого объединения, относятся процессы с участием сверхмассивных (с массой $\sim 10^{14} - 10^{15}$ ГэВ) векторных X - и Y -бозонов. При сжатии вещества в процессе коллапса до плотностей $\rho \sim 10^{74} - 10^{78}$ г/см³, отвечающих массе этих частиц, система почти мгновенно становится нейтральной по отношению к барионному заряду – независимо от его начального значения**). Поэтому еще до достижения планковской плотности $\rho_{Pl} \sim 10^{94}$ г/см³ вещество может полностью потерять свой исходный барионный заряд***).

Движение частиц и лучей света в пространстве-времени с замкнутым горизонтом $F = 0$ обладает рядом интересных особенностей. Падающие по радиусу частицы за короткое собственное время (порядка r_g/c) пересекают T_- -область, достигают линии $r = 0$ и начинают удаляться от центра. При этом, однако, они не могут вновь пересечь линию ED и попасть в T_- -область. Поэтому все такие частицы (при классическом описании) скапливаются вблизи ED и выходят наружу (через собственное время

) Зельдович (1976) обратил внимание на то, что при хоккингском излучении рождение тяжелых частиц, распадающихся с нарушением CP -четности, может привести к появлению в излучении избытка барионного или антибарионного заряда. Эти процессы были подробно рассмотрены в работах Долгова (1980а, б*, 1981). Поскольку эти процессы существуют лишь на относительно поздней стадии испарения, когда температура черной дыры достигает величины $\theta = 1/8\pi M \sim 10^{14} - 10^{15}$ ГэВ, то для черной дыры с массой M , значительно большей 1 г и образованной из барионов, барионная асимметрия распада не может значительно изменить попавший в них барионный заряд [см. по этому поводу обзоры Долгова и Зельдовича (1980*, 1981)].

**) Эти процессы подробно рассматривались в связи с проблемой возникновения барионной асимметрии Вселенной [см., например, Долгов, Зельдович (1980*, 1981), Бэрроу (1983), Колб, Турнер (1983)]. Оценки скорости нейтрализации барионного заряда в сверхплотном веществе в теориях Великого объединения можно найти в работах Фрая и др. (1980а, б, с), Колба, Турнера (1983).

***) Следует упомянуть, что при планковских плотностях мог бы оказаться существенным также чисто квантовогравитационный механизм несохранения барионного заряда, предложенный Хокингом (1984).

порядка r_g/c) после испарения "черной дыры". При этом они обладают "синим смещением" $\sim e^{\kappa_- V_{\text{ВН}}}$, где

$$\kappa_- = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial(e^{\psi} F)}{\partial r} \right|_{F=0} \quad (13.3.8)$$

— аналог поверхностной гравитации для внутреннего горизонта (на линии ED), а $V_{\text{ВН}}$ — время жизни "черной дыры". Аналогичный эффект "синего смещения" должен иметь место и для волн, попавших в такую "черную дыру". При квантовом рассмотрении этот эффект приводит к чрезвычайно сильному рождению частиц при распаде "черной дыры". Поскольку такой выброс энергии не должен превосходить величины порядка планковской массы (чтобы не нарушить закона сохранения энергии во внешнем пространстве), можно сделать вывод, что если оценка излучения, основанная на использовании квантовой теории в заданной усредненной метрике, является правильной, то внутренняя поверхностная гравитация κ_- должна быть величиной, меньшей или порядка $V_{\text{ВН}}^{-1}$ [Болашенко, Фролов (1984*, 1986*)] *).

Отсутствие горизонта событий в модели с замкнутым горизонтом могло бы привести к еще одному, чрезвычайно интересному следствию.

Рождение в черной дыре частицы, вылетающей наружу, сопровождается появлением частицы внутри нее. Отдаленный наблюдатель регистрирует лишь часть частиц, и, в соответствии с этим, излучение черной дыры обладает энтропией и описывается матрицей плотности (§ 9.3). В модели с замкнутым горизонтом горизонт событий отсутствует, и частицы, родившиеся внутри "черной дыры", после испарения последней могут выйти наружу. В результате квантовое состояние с точки зрения удаленного наблюдателя могло бы снова оказаться чистым. Иными словами, рост энтропии во внешнем пространстве, связанный с тепловым излучением черной дыры на стадии, пока ее масса значительно превосходит планковскую, должен был бы смениться резким уменьшением до нуля на последнем этапе ее распада.

В приведенном выше рассмотрении использовалось приближение, в рамках которого рождающиеся частицы считались невзаимодействующими и пренебрегалось флуктуациями гравитационного поля. Оба эти предположения, по-видимому, неправомерны при описании распространения частиц в области вблизи внутреннего горизонта ED . Процессы взаимодействия частиц внутри черной дыры и их рассеяния на флуктуациях гравитационного поля могут привести к тому, что частицы "забывают" свою фазу **) и при развале черной дыры не происходит уменьшения энтропии.

Помимо рассмотренных выше вариантов (образование голой сингулярности и модель с замкнутым горизонтом, в которой черная дыра выгорает

*) Подчеркнем, что этот вывод получен без учета флуктуаций гравитационного поля. О возможной связи флуктуации горизонта видимости и квантового излучения черных дыр см. Кодама (1980).

**) О механизме потери когерентности при рассеянии на квантовогравитационных флуктуациях см. Хокинг (1984).

полностью) возможен также вариант, когда после испарения черной дыры остается невыгоревший остаток. В качестве такого остатка могла бы образовываться *элементарная черная дыра* с массой порядка планковской*). (На рис. 89 этому случаю отвечало бы, например, такое поведение линии уровня $F = 0$, при котором внешняя и внутренняя части этой линии неограниченно продолжают по координате ν , близко сближаясь или даже сливаясь друг с другом.) Анализ сферически-симметричного коллапса системы с массой, меньшей планковской, показывает, что квантовые эффекты и, в частности, эффект поляризации вакуума приводят к тому, что "усредненная метрика" $g_{\mu\nu} = \langle \hat{g}_{\mu\nu} \rangle$, описывающая геометрию, в этом случае является всюду регулярной и горизонт видимости (а следовательно, и горизонт событий) вообще не образуется [Фролов, Вилковыский (1979, 1981, 1982)]. Этот результат указывает на то, что черные дыры с массой, меньшей планковской, не могут существовать, т.е. элементарные черные дыры, если они существуют, должны иметь массу порядка планковской. Впервые свойства подобных объектов, получивших название максимонов, были рассмотрены Марковым (1966*) [см. также Хокинг (1971a)].

§ 13.4. Элементарные черные дыры (максимоны).

Виртуальные черные дыры и пенная структура пространства-времени

Вопрос об устойчивости максимонов относительно квантового распада — один из основных для гипотезы об их существовании. Температура классической черной дыры формально обращается в нуль, если ее параметры — электрический (Q) и магнитный (P) заряды**) и угловой момент (J) —

*) Отметим, что существование в природе тяжелых магнитных монополей, предсказываемых в теориях Великого объединения, могло бы иметь любопытное следствие для малых черных дыр [Гиббонс (1977), Хискок (1983)]. Экстремальная (с магнитным зарядом) черная дыра массы $M > 150 \cdot (10^{17} \text{ ГЭВ}/\mu)^2$ (μ — масса монополя в ГЭВ) обладала бы временем жизни, большим времени жизни Вселенной, поскольку хоккингская температура такой дыры равна нулю, а процесс рождения монополей подавлен из-за их большой массы.

**) Отметим, что заряженные элементарные черные дыры представляют большой интерес при исследовании проблемы собственной энергии заряженных частиц. В рамках классической теории гравитационный дефект масс приводит к тому, что наблюдаемая на бесконечности масса M отличается от внутренней массы M_0 системы. Если система нейтральна, то при фиксированном значении M_0 возможны такие конфигурации, для которых M сколь угодно мало [Зельдович (1962a*)] или тождественно обращается в нуль (например, в том случае, когда масса M_0 образует замкнутый мир). Для заряженных (с зарядом Q) систем значение M ограничено снизу величиной $Q/\sqrt{G}$ ($P/\sqrt{G}$ — для магнитного заряда) [Арновитт и др. (1963), Марков, Фролов (1970*, 1972*), Гиббонс, Халл (1982), Людвигсен, Викерс (1983)]. Для электрона масса $e/\sqrt{G}$ равна $1,86 \cdot 10^{-6}$ г, что почти на порядок (на фактор $(\hbar c/e^2)^{1/2} \approx 11,7$) меньше значения планковской массы. Подобные классические решения, описывающие заряженные элементарные черные дыры, получили название "фридмонов". Их свойства подробно обсуждаются в работах Маркова, Фролова (1970*, 1972*).

связаны с массой M черной дыры соотношением

$$M^2 = \frac{Q^2 + P^2}{G} + \frac{J^2 c^2}{G^2 M^2}. \quad (13.4.1)$$

Модификация уравнений Эйнштейна — Максвелла из-за квантового эффекта поляризации вакуума может привести к изменению условия (13.4.1) обращения в нуль температуры черной дыры. Нельзя исключить также возможность, что при учете этих эффектов обратится в нуль температура и для нейтрального максимона. К сожалению, это еще не решает вопроса об устойчивости черной дыры относительно квантовых процессов. Дело в том, что максимоны (если они существуют) обладают минимально допустимой для черных дыр массой и потеря ими сколь угодно малой массы приводит к их полному развалу. При таком процессе естественно ожидать появления квантов с характерной энергией $\epsilon \sim m_{\text{Pl}} c^2$, для которых длина волны $\lambda \sim \hbar c / \epsilon$ сравнима с их гравитационным радиусом. При этих условиях приближение, основанное на малости влияния рожденных частиц на метрику, по-видимому, несправедливо.

В целом ответ на вопрос о существовании и устойчивости максимонов связан с поведением физических взаимодействий при энергиях, сравнимых с планковскими, и поэтому следует ожидать окончательного решения этого вопроса лишь после построения теории квантовой гравитации. Возможно, он найдет свое естественное решение в рамках единой теории всех взаимодействий (основанной, например, на одном из вариантов теории супергравитации или теории струн).

Если элементарные черные дыры существуют в природе, то они обладают рядом удивительных свойств [Марков (1966*)]. Их характеризует крайне малое сечение взаимодействия — порядка 10^{-66} см^2 . При падении максимона в поле тяготения Земли он приобретает энергию порядка 10^{20} эВ . Однако, поскольку скорость его движения невелика, то, по-видимому, наблюдать максимоны по их ионизирующей способности невозможно, даже если они заряжены и их взаимодействие с веществом достаточно сильное. Максимоны трудно удерживать и накапливать в обычном веществе на поверхности Земли, поскольку на длине межмолекулярного расстояния обычного вещества гравитационное поле Земли сообщает им энергию $\sim 10^3 \text{ эВ}$, что значительно больше энергии взаимодействия молекул.

Малость сечения взаимодействия нейтральных максимонов с веществом приводит к тому, что значительная (или даже основная) часть материи во Вселенной в настоящее время могла бы состоять из максимонов, не приводя к противоречию с наблюдениями. В частности, максимоны могли бы играть роль невидимого вещества, существование которого признается в настоящее время в космологии [Марков (1981b)]*).

По-видимому, наиболее перспективным методом поиска максимонов следует считать метод, основанный на регистрации продуктов их распада.

) Имеется возможность получить сильные ограничения на допустимую среднюю плотность максимонов во Вселенной с помощью соображений, аналогичных тем, которые используются при выводе ограничения на число монополей и других массивных частиц [см., например, Полнарев, Хлопов (1985)].

Если допустить существование связанной системы многих максимонов [Марков, Фролов (1979*)] или малого их числа — например, пары [Аман (1983)] — то при эволюции таких систем возможно слияние пары максимонов в один с выделением энергии порядка 10^{24} эВ. Такого типа процессы могли бы, по-видимому, регистрироваться в экспериментах типа ДЮМАНД [более подробно об этом см. Марков (1981a), Марков, Железных (1981)].

Стабильные максимоны являются максимально тяжелыми фундаментальными частицами [Марков (1976*, 1981c)]. Если связать с размером частицы ее комптоновскую длину волны $\lambda = h/mc$, то для частиц с массой $m > m_{\text{Pl}}$ этот размер оказывается меньше, чем ее гравитационный радиус*). Имеется и другая причина, по которой элементарные черные дыры, даже если они нестабильны, важны для теории элементарных частиц. Дело в том, что при проведении расчетов в современной квантовой теории и, в частности, при вычислении собственной энергии частиц обычно учитывают вклад промежуточных состояний с произвольно большой энергией, что приводит к появлению известных расходимостей. Учет гравитационного взаимодействия соответствующих виртуальных частиц и возможности появления виртуальных (короткоживущих) черных дыр в промежуточном состоянии может привести к устранению этих расходимостей [Марков (1971)].

Виртуальные черные дыры могут возникать и в вакууме в результате квантовых флуктуаций. Квантовые флуктуации гравитационного поля тем больше, чем меньше масштабы длин. На расстояниях порядка планковских флуктуации метрики сравнимы с самой метрикой. Подобные флуктуации означают возможность сильных отклонений от плоской геометрии и евклидовой топологии. Иными словами, из-за непрерывного рождения и уничтожения виртуальных черных дыр пространство-время в малых масштабах напоминает мыльную пену.

Представление о пенной структуре пространства-времени, сформулированное в 50-х годах Уилером, в последние годы получило развитие в работах Хокинга и его группы [Хокинг (1978, 1984), Хокинг и др. (1979, 1980), Уорнер (1982)].

Среди интересных приложений этих идей отметим: 1) возможное нарушение квантовой когерентности и превращение чистого состояния в смешанное из-за взаимодействия квантованного поля с флуктуациями гравитационного и 2) несохранение барионного и лептонного зарядов в процессе взаимодействия элементарных частиц с виртуальными черными дырами (с пространственно-временной "пенной") [Хокинг (1984)]. И хотя ожидаемое время жизни протона относительно этого процесса на много порядков превосходит предсказываемое в рамках теорий Великого объединения, сама возможность подобных процессов может иметь фундаментальное значение, особенно при обсуждении вопроса о происхождении Вселенной.

) Отметим, что планковская длина в этой ситуации выполняет роль своеобразной фундаментальной длины. Можно показать [Гинзбург (1975), Гинзбург, Фролов (1976*)], что в самом общем случае появление фундаментальной длины приводит к ограничению снизу на спектр существующих черных дыр.

Еще двадцать лет назад мало кто верил в саму возможность существования черных дыр. Гипотеза о черных дырах привлекла к себе внимание после открытия нейтронных звезд. И удивительное дело — черные дыры сразу “пришлись ко двору” в астрофизике. Им нашлось место не только в виде остатков при вспышках сверхновых, но и в ядрах шаровых скоплений, галактик и квазаров.

После открытия Хокингом явления квантового испарения черных дыр особое значение приобрел вопрос о космологической роли малых черных дыр. Гипотеза об элементарных черных дырах (максимонах) не только интересна своими возможными космологическими следствиями, но и существенна для физики элементарных частиц. Виртуальные черные дыры станут, вероятно, важным элементом будущей квантовой теории гравитации. Исследование свойств черных дыр привело к обнаружению глубоких связей между гравитацией, квантовой теорией и термодинамикой. Все это (и в особенности факт, что участие черных дыр в физических процессах приводит к ряду качественно новых закономерностей) привело к возникновению за последние 10 — 15 лет, по сути дела, новой области физики — физики черных дыр со своим объектом исследования и своими проблемами. Последние зачастую носят очень фундаментальный характер, а объект настолько удивителен, что эта область привлекает внимание многочисленных исследователей. В настоящей книге мы постарались осветить основные вопросы физики черных дыр. Авторы отдают себе отчет в том, что не все вопросы, затронутые в книге, изложены с той степенью полноты, которой они заслуживают. Некоторым оправданием для нас является то, что во многих случаях эта неполнота отражает существующую в теории ситуацию. Физика черных дыр — наука молодая и быстро развивающаяся. Хочется надеяться, что в этом развитии не только устранятся существующие в настоящее время неясности, но и что она сможет порадовать физиков новыми, быть может, еще более неожиданными результатами.

В настоящем Приложении собраны важнейшие формулы римановой геометрии и теории относительности, используемые в основном тексте книги. Поскольку вывод этих формул и необходимые разъяснения можно найти в существующих учебниках и монографиях [см., например, Ландау, Лифшиц (1973*), Мизнер, Торн, Уилер (1973), Хокинг, Эллис (1973), Крамер и др. (1980), Владимиров (1982*)], мы ограничиваемся здесь простым перечислением основных соотношений и краткими комментариями к ним.

Индексы: греческие $\alpha, \beta, \dots$ пробегает значения 0, 1, 2, 3; латинские $i, j, \dots$ — значения 1, 2, 3.

Симметризация $A_{(\mu_1 \dots \mu_p)}$ и *антисимметризация* $A_{[\mu_1 \dots \mu_p]}$ тензора $A_{\mu_1 \dots \mu_p}$:

$$A_{(\mu_1 \dots \mu_p)} = \frac{1}{p!} \sum_{\text{по всем перестановкам}} A_{\mu_1 \dots \mu_p},$$

$$A_{[\mu_1 \dots \mu_p]} = \frac{1}{p!} \sum_{\text{по всем перестановкам}} (-1)^J A_{\mu_1 \dots \mu_p},$$

где $J = 0$, если перестановка четная, и $J = 1$ в противном случае.

Метрика пространства-времени $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ имеет сигнатуру $-+++$.

Гладкая кривая $x^\mu(\lambda)$ называется пространственно-, времени- или светоподобной в точке $\lambda = \lambda_0$, если касательный к ней вектор $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ в этой точке удовлетворяет условию $u^\mu u_\mu > 0$, $u^\mu u_\mu < 0$ или $u^\mu u_\mu = 0$ соответственно. Кривая называется причинной, если в каждой ее точке $u^\mu u_\mu \leq 0$.

Причинное будущее $J^+(Q)$ (*прошлое* $J^-(Q)$) множества Q — это множество точек, для каждой из которых найдется проходящая через нее причинная кривая, направленная в прошлое (в будущее) и пересекающая Q .

Область Коши будущего $D^+(Q)$ (*прошлого* $D^-(Q)$) множества Q — это множество точек, для каждой из которых любая проходящая через нее причинная кривая, направленная в прошлое (в будущее), пересекает Q .

Полная поверхность Коши — это невремениподобная гиперповерхность, которую каждая причинная кривая пересекает точно один раз.

Тензор кривизны Римана:

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}, \quad (\text{П.1})$$

где

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\beta\nu,\alpha}). \quad (\text{П.2})$$

Тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}. \quad (\text{П.3})$$

Тензор Вейля:

$$C_{\mu\nu\sigma\tau} = R_{\mu\nu\sigma\tau} + g_{\nu[\sigma}S_{\tau]\mu} - g_{\mu[\sigma}S_{\tau]\nu}, \quad (\text{П.4})$$

где $S_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{6}g_{\mu\nu}R$.

Тензор Эйнштейна: $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$.

Ковариантная производная:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} B^{\beta_1} \dots \gamma_1 \dots &= \\ &= \partial_{\alpha} B^{\beta_1} \dots \gamma_1 \dots + \Gamma^{\beta_1}{}_{\alpha\mu} B^{\mu} \dots \gamma_1 \dots + \dots - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma_1} B^{\beta_1} \dots \mu \dots \dots \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Другое обозначение обычной четырехмерной ковариантной производной: $\nabla_{\alpha}(\) \equiv (\)_{;\alpha}$. Ковариантные производные по отношению к трехмерной метрике обозначаются $\nabla_i(\) = (\)_{;i}$. Для двумерных ковариантных производных используется обозначение $(\)|_A$ ($A = 1, 2$).

Коммутатор ковариантных производных:

$$(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha})B_{\mu} \dots^{\nu} \dots = R_{\alpha\beta\mu}{}^{\sigma} B_{\sigma} \dots^{\nu} \dots + \dots - R_{\alpha\beta\sigma}{}^{\nu} B_{\mu} \dots^{\sigma} \dots - \dots \quad (\text{П.6})$$

Производная Ли $\mathcal{L}_{\xi} A^{\alpha} \dots_{\beta} \dots$ тензорного поля $A^{\alpha} \dots_{\beta} \dots$ вдоль векторного поля ξ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi} A^{\alpha} \dots_{\beta} \dots &= \xi^{\mu} \partial_{\mu} A^{\alpha} \dots_{\beta} \dots - \partial_{\mu} \xi^{\alpha} \cdot A^{\mu} \dots_{\beta} \dots - \dots + \partial_{\beta} \xi^{\mu} \cdot A^{\alpha} \dots_{\mu} \dots + \dots = \\ &= \xi^{\mu} \nabla_{\mu} A^{\alpha} \dots_{\beta} \dots - \nabla_{\mu} \xi^{\alpha} A^{\mu} \dots_{\beta} \dots - \dots + \nabla_{\beta} \xi^{\mu} A^{\alpha} \dots_{\mu} \dots + \dots, \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

$$\mathcal{L}_{\xi} \eta^{\alpha} \equiv [\xi, \eta]^{\alpha} = \xi^{\mu} \partial_{\mu} \eta^{\alpha} - \eta^{\mu} \partial_{\mu} \xi^{\alpha}, \quad (\text{П.8})$$

$$\mathcal{L}_{\xi} \mathcal{L}_{\eta} - \mathcal{L}_{\eta} \mathcal{L}_{\xi} = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}. \quad (\text{П.9})$$

Производная Ферми – Уолкера $\mathcal{F}_{\xi} A^{\alpha \dots}_{\beta \dots}$ тензорного поля $A^{\alpha \dots}_{\beta \dots}$ вдоль векторного поля ξ ($\xi^{\mu} \xi_{\mu} \neq 0$):

$$\mathcal{F}_{\xi} A^{\alpha \dots}_{\beta \dots} = \xi^{\mu} \nabla_{\mu} A^{\alpha \dots}_{\beta \dots} + \mathcal{F}^{\alpha}_{\sigma} A^{\sigma \dots}_{\beta \dots} + \dots - \mathcal{F}^{\sigma}_{\beta} A^{\alpha \dots}_{\sigma \dots} - \dots, \quad (\text{П.9 а})$$

где

$$\mathcal{F}^{\alpha}_{\sigma} = (w^{\alpha} \xi_{\sigma} - \xi^{\alpha} w_{\sigma}) \epsilon(\xi),$$

$$w^{\alpha} = \xi^{\beta} \xi^{\alpha}_{;\beta}, \quad \epsilon(\xi) = \text{sign}(-\xi^{\mu} \xi_{\mu}).$$

Параллельный перенос. Тензорное поле $A^{\alpha \dots}_{\beta \dots}$ параллельно переносится вдоль векторного поля ξ , если выполнено условие

$$\xi^{\mu} \nabla_{\mu} A^{\alpha \dots}_{\beta \dots} = 0. \quad (\text{П.10})$$

Говорят, что это поле параллельно переносится вдоль ξ в смысле Ли, если

$$\mathcal{L}_{\xi} A^{\alpha \dots}_{\beta \dots} = 0, \quad (\text{П.11})$$

и в смысле Ферми – Уолкера, если

$$\mathcal{F}_{\xi} A^{\alpha \dots}_{\beta \dots} = 0. \quad (\text{П.12})$$

Геодезическая $x^{\alpha}(\lambda)$ определяется как решение уравнения

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}, \quad (\text{П.13})$$

где $f(\lambda)$ – произвольная функция. За счет изменения параметризации $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\lambda)$ эту функцию можно обратить в нуль. Соответствующий параметр называют аффинным. Аффинный параметр определен с точностью до линейного преобразования. Для времениподобных $\left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} < 0\right)$ и пространственноподобных $\left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} > 0\right)$ геодезических аффинный параметр пропорционален собственной длине $\int \sqrt{|ds^2|}$ вдоль кривой.

Уравнение девиации геодезических. Пусть $n^{\mu}(\lambda)$ – вектор, соединяющий пару близких геодезических при одинаковом значении аффинных параметров λ вдоль них. Тогда имеет место уравнение

$$\frac{D^2 n^{\alpha}}{d\lambda^2} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} n^{\gamma} u^{\delta} = 0,$$

где

$$u^{\beta} = \frac{dx^{\beta}}{d\lambda}, \quad \frac{D}{d\lambda} = u^{\mu} \nabla_{\mu}.$$

Векторное поле Киллинга ξ^μ в пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$ определяется соотношением

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \equiv 2\xi_{(\mu;\nu)} = 0. \quad (\text{П.14})$$

Векторное поле Киллинга ξ^μ удовлетворяет уравнению

$$\xi_{\mu;\alpha;\beta} = R_{\gamma\beta\alpha\mu} \xi^\gamma. \quad (\text{П.15})$$

Если ξ^μ и η^μ — два векторных поля Киллинга, то $[\xi, \eta]^\mu \equiv \xi^\alpha \partial_\alpha \eta^\mu - \eta^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu$ — также векторное поле Киллинга.

Если ξ^μ времениподобно ($\xi^\mu \xi_\mu < 0$) и $u^\mu = \xi^\mu / |\xi_\alpha \xi^\alpha|^{1/2}$ — 4-скорость движения вдоль ξ^μ , то ускорение

$$w^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = \frac{1}{2} \nabla^\mu \ln |\xi_\alpha \xi^\alpha|. \quad (\text{П.16})$$

Тензорное поле Киллинга — это симметричное тензорное поле $\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = \xi(\alpha_1 \dots \alpha_m)$, удовлетворяющее условию

$$\xi(\alpha_1 \dots \alpha_m; \beta) = 0. \quad (\text{П.17})$$

Конформные преобразования определяются как преобразования метрики вида

$$g_{\alpha\beta}(x) = \Omega^2(x) \hat{g}_{\alpha\beta}(x). \quad (\text{П.18})$$

Тензорное поле $A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m}$ является полем веса s , если при преобразовании (П.18) оно преобразуется по закону

$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} = \Omega^{s-n+m} \hat{A}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m}. \quad (\text{П.19})$$

Если $\hat{\nabla}_\gamma$ — ковариантная производная в метрике $\hat{g}_{\alpha\beta}$, то

$$\hat{\nabla}_\gamma A^{\alpha \dots}_{\beta \dots} = \nabla_\gamma A^{\alpha \dots}_{\beta \dots} + C^\alpha_{\gamma\sigma} A^\sigma \dots_{\beta \dots} + \dots - C^\sigma_{\gamma\beta} A^{\alpha \dots}_{\sigma \dots} - \dots, \quad (\text{П.20})$$

где

$$C^\alpha_{\gamma\beta} = C^\alpha_{(\gamma\beta)} = -\Omega^{-1} [\delta^\alpha_\beta \nabla_\gamma \Omega + \delta^\alpha_\gamma \nabla_\beta \Omega - g_{\gamma\beta} g^{\alpha\sigma} \nabla_\sigma \Omega]. \quad (\text{П.21})$$

При конформных преобразованиях тензор Вейля $C_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$ не изменяется, а кривизны $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$, $R_{\alpha\beta}$ и R преобразуются следующим образом:

$$\hat{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\sigma = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\sigma + 2\nabla_{[\alpha} C^\sigma_{\beta]\gamma} + 2C^\lambda_{\gamma[\alpha} C^\sigma_{\beta]\lambda}, \quad (\text{П.22})$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} + 2\Omega^{-1} \nabla_\alpha \nabla_\beta \Omega + \Omega^{-1} g_{\alpha\beta} \nabla^\sigma \nabla_\sigma \Omega \\ &\quad - 3\Omega^{-2} g_{\alpha\beta} g^{\gamma\sigma} \nabla_\gamma \Omega \nabla_\sigma \Omega, \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

$$\hat{R} = \Omega^2 R + 6\Omega g^{\gamma\sigma} \nabla_\gamma \nabla_\sigma \Omega - 12g^{\gamma\sigma} \nabla_\gamma \Omega \nabla_\sigma \Omega. \quad (\text{П.24})$$

Элемент объема:

$$d^4 v = \sqrt{-g} d^4 x. \quad (\text{П. 25})$$

Элемент $d\sigma_\alpha$ гиперповерхности Σ , определяемой уравнениями $x^\mu = x^\mu(y^i)$, есть

$$d\sigma_\alpha = \frac{1}{3!} e_{\alpha\beta_1\beta_2\beta_3} \det \left(\frac{\partial x^{\beta_i}}{\partial y^j} \right) dy^1 dy^2 dy^3, \quad (\text{П. 26})$$

где $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — антисимметричный тензор:

$$e_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (\text{П. 27})$$

($\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — полностью антисимметричный символ ($\epsilon_{0123} = 1$)).

Элемент $d\sigma_{\alpha\beta}$ двумерной поверхности S , определяемой уравнениями $x^\mu = x^\mu(z^a)$ ($a = 1, 2$), есть

$$d\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} e_{\alpha\beta\gamma_1\gamma_2} \det \left(\frac{\partial x^{\gamma_a}}{\partial z^b} \right) dz^1 dz^2. \quad (\text{П. 28})$$

Интегрирование в римановом пространстве. Пусть φ — скалярное, φ^α — векторное и $\varphi^{\alpha\beta}$ — антисимметричное тензорное поля. Тогда определены интегралы

$$T_V[\varphi] = \int_V \varphi d^4 v, \quad (\text{П. 29})$$

$$T_\Sigma[\varphi^\alpha] = \int_\Sigma \varphi^\alpha d\sigma_\alpha, \quad (\text{П. 30})$$

$$T_S[\varphi^{\alpha\beta}] = \int_S \varphi^{\alpha\beta} d\sigma_{\alpha\beta}. \quad (\text{П. 31})$$

Теорема Стокса:

$$\int_V \varphi^\alpha{}_{;\alpha} d^4 v = \int_{\partial V} \varphi^\alpha d\sigma_\alpha, \quad (\text{П. 32})$$

$$\int_\Sigma \varphi^{\alpha\beta}{}_{;\beta} d\sigma_\alpha = \int_{\partial\Sigma} \varphi^{\alpha\beta} d\sigma_{\alpha\beta}, \quad (\text{П. 33})$$

где ∂V и $\partial\Sigma$ — границы 4-объема V и гиперповерхности Σ .

Индукцированная метрика h_{ij} и внешняя кривизна K_{ij} гиперповерхности.

Пусть $x^\mu = x^\mu(y^i)$ — уравнение гиперповерхности Σ , n^μ — единичная нормаль к ней и $e_{(i)}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} e_{(i)}^j$ — тройка взаимно ортогональных единичных векторов, касательных к Σ . Тогда

$$h_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} g_{\mu\nu}, \quad (\text{П. 34})$$

$$K_{(i)(j)} = n_\mu e_{(i)}^\nu \nabla_\nu e_{(j)}^\mu, \quad (\text{П. 35})$$

где $K_{(i)(j)}$ — компоненты K_{ij} в базисе $e_{(i)}$.

Уравнения Гаусса Кодаци:

$$R^m{}_{ijk} = {}^{(3)}R^m{}_{ijk} + \epsilon(n) (K_{ij} K^m{}_k - K_{ik} K_j{}^m), \quad (\text{П. 36})$$

$$n_\mu R^\mu{}_{ijk} = -\epsilon(n) (K_{ij}{}_{;k} - K_{ik}{}_{;j}), \quad (\text{П. 37})$$

где $\epsilon(n) = n_\mu n^\mu = \pm 1$, $(\)_{;i}$ — ковариантная производная в метрике h_{ij} ; ${}^{(3)}R^m{}_{ijk}$ — тензор кривизны трехмерного пространства с этой метрикой.

"3 + 1"-разбиение тензора Эйнштейна:

$$n^\alpha n^\beta G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} {}^{(3)}R + \frac{1}{2} \epsilon(n) [K^2 - K_{ij} K^{ij}], \quad (\text{П. 38})$$

$$n^\alpha G_{\alpha i} = -\epsilon(n) [K_i{}^m{}_{;m} - K_{;i}], \quad (\text{П. 39})$$

где ${}^{(3)}R = h^{ik} {}^{(3)}R^m{}_{imk}$, $K = h^{ij} K_{ij}$.

Действие Эйнштейна:

$$W[g] = \frac{c^3}{16\pi G} \left(\int_V R \sqrt{-g} d^4x - 2 \int_V K \sqrt{h} d^3y \right). \quad (\text{П. 40})$$

Уравнения Эйнштейна:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (\text{П. 41})$$

где $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{-2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W_m}{\delta g^{\alpha\beta}}, \quad (\text{П. 42})$$

W_m — действие материи. Для ковариантного действия W_m $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$.

Энергетические условия. Пусть ξ^μ — произвольное времениподобное векторное поле.

Слабое энергетическое условие означает выполнение следующих неравенств для заданного $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \geq 0. \quad (\text{П. 43})$$

Условие энергодоминантности: $T_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta$ — непространственноподобный вектор.

Сильное энергетическое условие — выполнение неравенств

$$T_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \geq \frac{1}{2} T^\mu{}_\mu \xi^\alpha \xi_\alpha. \quad (\text{П. 44})$$

Электромагнитное поле A_μ .

Действие:

$$W[A] = -\frac{1}{16\pi} \int_V F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int A_\mu j^\mu \sqrt{-g} d^4x, \quad (\text{П. 45})$$

$$F_{\mu\nu} = 2A_{[\nu,\mu]}. \quad (\text{П. 46})$$

Уравнения Максвелла:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi j^\mu. \quad (\text{П. 47})$$

Тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (\text{П. 48})$$

Скалярное поле φ .

Действие:

$$W_\xi[\varphi] = -\frac{1}{8\pi} \int_V (g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + m^2 \varphi^2 + \xi R \varphi^2) \sqrt{-g} d^4x + \\ + \int_V J \varphi \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{4\pi} \xi \int_{\partial V} K \varphi^2 \sqrt{h} d^3x, \quad (\text{П. 49})$$

где m — масса поля, ξ — свободный параметр. При $m = 0$, $\xi = 1/6$ теория конформно-инвариантна.

Уравнения поля:

$$\square \varphi - (m^2 + \xi R) \varphi = -4\pi J. \quad (\text{П. 50})$$

Тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu}^{(\xi)} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\varphi_{,\alpha} \varphi^{,\alpha} + m^2 \varphi^2) + \right. \\ \left. + \xi \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \varphi^2 + g_{\mu\nu} (\varphi^2)_{;\alpha}{}^\alpha - (\varphi^2)_{;\mu\nu} \right] \right\} + J \varphi g_{\mu\nu}. \quad (\text{П. 51})$$

Законы сохранения. Пусть ξ^μ — векторное и $\xi^{\mu\nu}$ — тензорное поля Киллинга. Если $T^{\mu\nu}$ — симметричный тензор, удовлетворяющий условию $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ (тензор энергии-импульса), то величина

$$P_\xi = \int_\Sigma T^{\mu\nu} \xi_\mu d\sigma_\nu \quad (\text{П. 52})$$

не зависит от выбора полной поверхности Коши Σ .

Если p^μ — импульс частицы ($p^\mu{}_{;\nu} = 0$), то величины

$$P_\xi = \xi^\mu p_\mu, \quad Q_\xi = \xi^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad (\text{П. 53})$$

постоянны вдоль траектории частицы.

Конгруэнция кривых — трехпараметрическое семейство кривых $x^\mu(\lambda; y^i)$ (λ — параметр вдоль кривой, y^i — параметр, "нумерующий" кривую), обладающее тем свойством, что через каждую точку проходит одна и только одна кривая семейства.

Если выбраны конкретные λ и y^i на конгруэнции, то мы получаем систему координат. Конгруэнция времениподобных кривых называется системой отсчета.

Дифференциальные инварианты конгруэнции времениподобных кривых.

Пусть λ — аффинный параметр и $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ — векторное поле ($u^\mu u_\mu = -1$),

связанное с конгруэнцией $x^\mu(\lambda; y^i)$. Тогда $u_{\alpha;\beta}$ допускает однозначное представление вида

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta p_{\alpha\beta} - w_\alpha u_\beta, \quad (\text{П.54})$$

где $p_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$ — проекционный тензор, проектирующий векторы на 3-пространство, ортогональное u^μ , $w_\alpha = u^\beta u_{\alpha;\beta}$ — ускорение, $\theta = u^\alpha{}_{;\alpha}$ — "расхождение" мировых линий конгруэнции, $\omega_{\alpha\beta}$ — тензор вращения и $\sigma_{\alpha\beta}$ — тензор сдвига:

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} (u_{\alpha;\mu} p^\mu{}_\beta - u_{\beta;\mu} p^\mu{}_\alpha), \quad (\text{П.55})$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (u_{\alpha;\mu} p^\mu{}_\beta + u_{\beta;\mu} p^\mu{}_\alpha) - \frac{1}{3} \theta p_{\alpha\beta}. \quad (\text{П.56})$$

Уравнение Райчаудхури:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = w^\alpha{}_{;\alpha} + 2(\omega^2 - \sigma^2) - \frac{1}{3} \theta^2 - R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta, \quad (\text{П.57})$$

$$\text{где } \omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}.$$

Выберем в качестве параметра λ собственное время s вдоль каждой кривой системы отсчета. Тогда u^μ является 4-скоростью. В этом случае (П.54) обычно записывают в виде [см. Владимиров (1982*)]

$$u_{\mu;\nu} = A_{\mu\nu} + D_{\mu\nu} + F_\mu u_\nu. \quad (\text{П.58})$$

Непосредственный физический смысл имеют значения $A_{\mu\nu}$, $D_{\mu\nu}$ и F_μ с пространственными индексами:

A_{ik} — тензор угловой скорости вращения системы отсчета

$$A^{ik} = \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^0} + g^{i\alpha} \Gamma^k_{\alpha 0} \right); \quad (\text{П.59})$$

D_{ik} — тензор скорости деформации системы отсчета

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial h^*_{ik}}{\partial x^0}, \quad (\text{П.60})$$

$$\text{где } h^*_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}}, \quad h^*_{ik} h^{*il} = \delta^l_k;$$

F_i — вектор поля гравитационно-инерциальных сил, действующих в системе отсчета (т.е. вектор ускорения свободного падения пробной покоящейся частицы)

$$F^i = c^2 \frac{\Gamma^i_{00}}{g_{00}}. \quad (\text{П.61})$$

С помощью A_{ik} вычисляется вектор угловой скорости вращения системы Ω_i :

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} A^{kl}, \quad (\text{П.62})$$

где ϵ_{ijk} — абсолютно антисимметричный объект, $\epsilon_{123} = \left(\frac{g}{g_{00}} \right)^{1/2}$.

Скаляр $\Omega = \sqrt{\Omega_i \Omega_k h^{*ik}}$ есть угловая скорость поворота за единицу собственного времени $d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt$.

Скаляр

$$F = \sqrt{F^i F^k h_{ik}^*}. \quad (\text{П.63})$$

есть абсолютная величина ускорения свободного падения покоящегося тела в выбранной системе отсчета.

- Алиев А.И., Гальцов Д.В., Соколов А.А. — Известия вузов, Физика, 1980, № 3, с. 7.
Аман Э.Г. Препринт ИЯИ АН СССР П-0272. — Москва, 1983.
Белинский В.А., Лифшиц Е.М., Халатников И.М. — УФН, 1970, т. 102, с. 463.
Березин В.А. Препринт ИЯИ АН СССР П-0183. — Москва, 1980.
Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1965.
Бескин В.С., Гуревич А.В., Истомин Я.Н. — ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 401.
Богородский А.Ф. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. — Изд-во Киевского ун-та, 1962.
Болашенко П.А., Фролов В.П. — В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации". — Москва, 1984, т. 1, с. 102.
Болашенко П.А., Фролов В.П. — Труды ФИАН, 1986, т. 169, с. 159.
Болозовский Б.М., Столяров С.Н. — В кн.: Эйнштейновский сборник. — М.: Наука, 1980.
Бочарова Н.М., Бронников К.А., Мельников В.Н. — Вестник МГУ (физика, астрономия), 1970, т. 1, с. 706.
Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. — М.: Энергоиздат, 1982.
Волович И.В., Загребнов В.А., Фролов В.П. — ТМФ, 1976, т. 29, с. 191.
Волович И.В., Загребнов В.А., Фролов В.П. — ЭЧАЯ, 1978, т. 9, с. 147.
Гальцов Д.В. — В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. — М.: Наука, 1980, т. 2, с. 183.
Гальцов Д.В., Петухов В.И. — ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 801.
Гальцов Д.В., Померанцева Г.В., Чижев Г.А. — Известия вузов, Физика, 1983, № 8, с. 75.
Гальцов Д.В., Померанцева Г.В., Чижев Г.А. — Известия вузов, Физика, 1984, № 8, с. 81.
Гинзбург В.Л. — ДАН СССР, 1964, т. 156, с. 43.
Гинзбург В.Л. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 514.
Гинзбург В.Л., Озерной Л.М. — ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 1030.
Гинзбург В.Л., Фролов В.П. — Письма в АЖ, 1976, т. 2, с. 474.
Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. — М.: Атомиздат, 1980.
Гуревич А.В., Истомин Я.Н. — ЖЭТФ, 1985, т. 89, с. 3.
Долгов А.Д. — ЖЭТФ, 1980 а, т. 79, с. 337.
Долгов А.Д. — ЯФ, 1980 б, т. 32, с. 1606.
Долгов А.Д., Зельдович Я.Б. — УФН, 1980, т. 130, с. 559.
Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. — ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 170.
Дорошкевич А.Г., Новиков И.Д. — ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 3.
Дорошкевич А.Г., Новиков А.Г., Полнарев А.Г. — ЖЭТФ, 1972, т. 63, с. 1538.
Дымникова И.Г. Препринт ФТИ-795. — Ленинград, 1982.
Дымникова И.Г. — УФН, 1986, т. 148, с. 393.
Жук А.И., Фролов В.П. — Кратк. сообщ. по физ., 1981, № 9, с. 25.
Зельдович Я.Б. — ЖЭТФ, 1962 а, т. 42, с. 641.
Зельдович Я.Б. — ЖЭТФ, 1962 б, т. 42, с. 1667.
Зельдович Я.Б. — Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 12, с. 443.

- Зельдович Я.Б. – Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 270.
- Зельдович Я.Б. – ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 2076.
- Зельдович Я.Б. – Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 29.
- Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. – ДАН СССР, 1964, т. 155, с. 1033.
- Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. – АЖ, 1966, т. 43, с. 758.
- Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Релятивистская астрофизика. – М.: Наука, 1967.
- Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюции звезд. – М.: Наука, 1971.
- Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. – М.: Наука, 1975.
- Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., Старобинский А.А. – ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 1897.
- Зельдович Я.Б., Старобинский А.А. – ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 2161.
- Зельманов А.Л. – ДАН СССР, 1956, т. 107, с. 815.
- Зельников А.И., Фролов В.П. – ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 321.
- Зельников А.И., Фролов В.П. – Труды ФИАН, 1983, т. 152, с. 96.
- Зельников А.И., Фролов В.П. – Труды ФИАН, 1986, т. 169, с. 132.
- Кардашев Н.С. и др. – АЖ, 1983, т. 60, с. 209.
- Кардашев Н.С., Митрофанов И.Г., Новиков И.Д. – АЖ, 1984, т. 61, с. 1113.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973.
- Лифшиц Е.М. – ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 587.
- Марков М.А. – ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 879.
- Марков М.А. – УФН, 1973, т. 111, с. 3.
- Марков М.А. О природе материи. – М.: Наука, 1976.
- Марков М.А., Фролов В.П. – ТМФ, 1970, т. 3, с. 3.
- Марков М.А., Фролов В.П. – ТМФ, 1972, т. 13, с. 41.
- Марков М.А., Фролов В.П. – Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 372.
- Надежин Д.К., Новиков И.Д., Полнарев А.Г. – АЖ, 1978, т. 55, с. 216.
- Новиков И.Д. – АЖ, 1961, т. 38, с. 564.
- Новиков И.Д. – Вестник МГУ, 1962 а, сер. III, № 5, с. 90.
- Новиков И.Д. – Вестник МГУ, 1962 б, сер. III, № 6, с. 61.
- Новиков И.Д. – АЖ, 1963, т. 40, с. 772.
- Новиков И.Д. – Сообщения ГАИШ, 1964 а, № 132, с. 3, 43.
- Новиков И.Д. – АЖ, 1964 б, т. 41, с. 1075.
- Новиков И.Д. – Письма в ЖЭТФ, 1966 а, т. 3, с. 223.
- Новиков И.Д. – АЖ, 1966 б, т. 43, с. 911.
- Новиков И.Д. – ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 949.
- Новиков И.Д. – ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 262.
- Новиков И.Д. Черные дыры и Вселенная. – М.: Молодая гвардия, 1985.
- Новиков И.Д., Старобинский А.А. – ЖЭТФ, 1980, т. 78, с. 3.
- Новиков И.Д., Полнарев А.Г. – АЖ, 1980, т. 57, с. 250.
- Пенроуз Р. – УФН, 1973, т. 109, с. 355.
- Пикельнер С.Б. Основы космической электродинамики. – М.: Физматгиз, 1961.
- Полнарев А.Г., Хлопов М.Ю. – УФН, 1985, т. 145, с. 369.
- Поляков А.М. – Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 194.
- Поляков А.М. – ЖЭТФ, 1975, т. 41, с. 988.
- Поплавский Р.П. Термодинамика информационных процессов. – М.: Наука, 1981.
- Рылов Ю.А. – ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 1955.
- Сибгатуллин Н.Р. – ДАН СССР, 1973, т. 209, с. 815.
- Сибгатуллин Н.Р. – ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 1187.
- Сибгатуллин Н.Р. Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. – М.: Наука, 1984.
- Сибгатуллин Н.Р., Алексеев Г.А. – ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1233.
- Соколов А.А. и др. Тезисы докладов VI Советской гравитационной конференции. – Москва, 1984, с. 105.
- Старобинский А.А. – ЖЭТФ, 1973, т. 64, с. 48.
- Старобинский А.А., Чурилов С.М. – ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 3.
- Тернов И.М. и др. – ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 377.
- Фролов В.П. Кандидатская диссертация, 1973.
- Фролов В.П. – ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 813.
- Фролов В.П. – Труды ФИАН, 1976 а, т. 96, с. 72.
- Фролов В.П. – УФН, 1976 б, т. 118, с. 473.
- Фролов В.П. – В кн.: Эйнштейновский сборник 1975 – 1976. – М.: Наука, 1978, с. 82.

- Фролов В.П. В кн.: Теоретико-групповые методы в физике (труды II Международного семинара, Звенигород, 24 – 26 ноября 1982 г.). – М.: Наука, 1983 а, т. 1, с. 10.
- Фролов В.П. Введение в физику черных дыр. – М.: Знание, 1983б.
- Фролов В.П. – Труды ФИАН, 1986, т. 169, с. 3.
- Шварцман В.Ф. – ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 881.
- Швингер Ю. Теория квантованных полей. – М.: ИЛ, 1956.
- Шкловский И.С. – АЖ, 1967, т. 44, с. 930.
- Aichelburg P.C., Güven R. – Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 2066.
- Aichelburg P.C., Güven R. – Phys. Rev. Ser. D, 1983a, v. 27, p. 456.
- Aichelburg P.C., Güven R. – Phys. Rev. Lett., 1983b, v. 51, p. 1613.
- Aichelburg P.C., Sexl R.U. – GRG, 1971, v. 2, p. 303.
- Arnowitt R., Deser S., Misner C.W. – In: Gravitation, an Introduction to current research /Ed. L. Witten – N.Y. London, 1963. Рус. пер.: В кн.: Эйнштейновский сборник. – М.: Наука, 1967, с. 233.
- Arons I. – Astrophys. J., 1983, v. 266, p. 215.
- Baal P. van, Bais F.A., Nieuwenhuizen P. van – Nucl. Phys. Ser. B, 1984, v. 233, p. 477.
- Balbinot R. – Phys. Lett. Ser. B, 1984a, v. 136, p. 337.
- Balbinot R. – Class. Quant. Grav., 1984b, v. 1, p. 573.
- Balbinot R., Bergamini R. – Nuovo Cim. Ser. B, 1982, v. 68, p. 104.
- Balbinot R., Bergamini R., Giorgini B. – Nuovo Cim. Ser. B, 1982, v. 71, p. 27.
- Balbinot R., Brown M.R. – Phys. Lett. Ser. A, 1984, v. 100, p. 80.
- Bardeen J.M. – Bull. Am. Phys. Soc., 1968, v. 13, p. 41.
- Bardeen J.M. – Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 382.
- Bardeen J.M., Carter B., Hawking S.W. – Commun. Math. Phys., 1973, v. 31, p. 161.
- Bardeen J.M., Press W.H. – J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 7.
- Bardeen J.M., Press W.H., Teukolsky S.A. – Astrophys. J., 1972, v. 178, p. 347.
- Barrow I.D. – Cosmology and Elementary Particles Physics. – In: Fundamentals of Cosmic Physics. – Gordon and Breach, 1982, v. 7.
- Barrow I.D., Silk I. The left hand of creation. – Basic Book Inc., N.Y., 1983.
- Bekenstein J.D. – Phys. Rev. Lett., 1972a, v. 28, p. 452.
- Bekenstein J.D. – Phys. Rev. Ser. D, 1972b, v. 5, p. 1239.
- Bekenstein J.D. – Phys. Rev. Ser. D, 1972c, v. 5, p. 2403.
- Bekenstein J.D. – Phys. Rev. Ser. D, 1973a, v. 7, p. 949.
- Bekenstein J.D. – Phys. Rev. Ser. D, 1973b, v. 7, p. 2333.
- Bekenstein J.D. – Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 9, p. 3292.
- Bekenstein J.D. – Ann. Phys. (N.Y.), 1975, v. 91, p. 75.
- Bekenstein J.D. – Phys. Today, 1980, v. 33, p. 24.
- Bekenstein J.D. – Phys. Rev. Ser. D, 1982, v. 26, p. 950.
- Bekenstein J.D. – Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 27, p. 2262.
- Bekenstein J.D., Meisels A. – Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 2775.
- Bičák J. – GRG, 1972, v. 3, p. 331.
- Bičák J. – Czech. J. Phys. Ser. B, 1979, v. 29, p. 945.
- Bičák J. – Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1980, v. 371, p. 429.
- Bičák J. – In: 10-th Int. Conf. on Gen. Rel. and Grav., Padova/Eds. B. Bertotti, F. de Felice, A. Pascolini. – Roma, 1983, v. 2, p. 688.
- Bičák J. – Mon. Not. RAS, 1985, v. 3.
- Bičák J., Dvorak L. – Czech. J. Phys. Ser. B, 1977, v. 27, p. 127.
- Bičák J., Dvorak L. – Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 22, p. 2933.
- Bičák J., Hoenselaers C. – Phys. Rev. Ser. D, 1985, v. 31, p. 2476.
- Bičák J., Stuchlik Z. – Mon. Not. RAS, 1976, v. 175, p. 381.
- Birkhoff G.D. Relativity and Modern Physics. – Harvard Univ. Press, 1923.
- Birrel N.D., Davies P.C.W. Quantum Fields in Curved Space. – Cambridge Univ. Press, 1982. Рус. пер.: Биррел Н., Девис П. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. – М.: Мир, 1984.
- Bishop N.T. – GRG, 1984, v. 16, p. 589.
- Bisnovatyi-Kogan G.S., Lukash V.N., Novikov I.D. – In: Proc. of the fifth European Regional Meeting in Astronomy. – Liege, Belgium, 1980, G. 1.1.
- Blandford R.D. – Mon. Not. RAS, 1976, v. 176, p. 465.

- Blandford R.D. — In: Active Galactic Nuclei/Eds. C. Hazard, S. Mitton. — Cambridge Univ. Press, 1979, p. 241.
- Blandford R.D., Rees M.J. — Phys. Sci., 1978, v. 17, p. 265.
- Blandford R.D., Thorne K. — In: General Relativity, An Einstein Centenary survey/Eds. S.W. Hawking, W. Israel. — Cambridge Univ. Press, 1979, p. 454. Рус. пер.: В кн.: Общая теория относительности. — М.: Мир, 1983, с. 163.
- Blandford R.D., Znajek R.L. — Mon. Not. RAS, 1977, v. 179, p. 433.
- Bleyer U., Frolov V.P., Zel'nikov A.I. — Ann. Physik, 1986 (in press).
- Bolashenko P.A., Frolov V.P. — In: Contributed papers, 10-th Int. Conf. on Gen. Rel. and Grav. — Padova, 1983, v. 2, p. 1036.
- Bondi H., Burg van der M.G.J., Metzner A.W.K. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1962, v. 269, p. 21.
- Bondi H., Gold T. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1955, v. 229, p. 416.
- Boulware D.G. — Phys. Rev. Ser. D, 1975a, v. 11, p. 1404.
- Boulware D.G. — Phys. Rev. Ser. D, 1975b, v. 12, p. 350.
- Boulware D.G. — Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 2169.
- Boulware D.G. — Ann. Phys. (N.Y.), 1980, v. 124, p. 169.
- Boyer M. — Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 28, p. 703.
- Bowen J., Rauber J., York Jr. J.W. — Class. Quant. Grav., 1984, v. 1, p. 591.
- Bowen J., York Jr. J.W. — Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 2047.
- Boyer R.H. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1969, v. 311, p. 245.
- Boyer R.H., Lindquist R.W. — J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 265.
- Brill D.R., Lindquist R.W. — Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 471.
- Brillouin L. Science and Information Theory. — Academic Press, N.Y., 1956. Рус. пер.: Бриллюэн Л. Наука и теория информации. — М.: Физматгиз, 1960.
- Bronnikov K.A., Kireev Yu.N. — Phys. Lett. Ser. A, 1978, v. 67, p. 95.
- Brown M.R., Ottewill A.C. — Phys. Rev. Ser. D, 1985, v. 31, p. 2514.
- Bunting G. Proof of the Uniqueness Conjecture for Black Holes. Ph.D. Thesis — Dept. of Math., Univ. of New England, Armilade, Australia, 1983.
- Burbidge G.R. — Comm. Astrophys. Space Sci., 1972, v. 4, p. 105.
- Caderni N., Calvani M. — Phys. Lett. Ser. A, 1979, v. 71, p. 1.
- Calvani M. — Nuovo Cim. Ser. A, 1980, v. 58, p. 364.
- Candelas P. — Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 2185.
- Candelas P., Chrzanowski P., Howard K.W. — Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 297.
- Candelas P., Howard K.W. — Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 29, p. 1618.
- Carr B.J. — In: Quantum Gravity/Eds. M.A. Markov, P.C. West. — Plenum Press, N.Y. and London, 1983, p. 337.
- Carter B. — Phys. Lett., 1966a, v. 21, p. 423.
- Carter B. — Phys. Rev., 1966b, v. 141, p. 1242.
- Carter B. — Phys. Rev., 1968a, v. 174, p. 1559.
- Carter B. — Commun. Math. Phys., 1968b, v. 10, p. 280.
- Carter B. — J. Math. Phys., 1969, v. 10, p. 70.
- Carter B. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 26, p. 331.
- Carter B. General theory of Stationary black hole states. — In: Black Holes/Eds. C. De Witt, B.S. De Witt. — Gordon and Breach, New York, 1973a.
- Carter B. — Commun. Math. Phys., 1973b, v. 30, p. 261.
- Carter B. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 558.
- Carter B. The Vacuum Black Hole Uniqueness Theorem and Its Conceivable Generalization — In: Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity/Ed. R. Ruf-fini. — North-Holland, Amsterdam, 1976.
- Carter B. — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 3395.
- Carter B. The general theory of the mechanical, electromagnetic and thermodynamic properties of black holes. — In: General Relativity, An Einstein Centenary Survey/Eds. S.W. Hawking, W. Israel. — Cambridge Univ. Press, 1979.
- Carter B. — Commun. Math. Phys., 1985, v. 99, p. 563.
- Chandrasekhar S. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1976, v. 349, p. 571.
- Chandrasekhar S. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1979a, v. 365, p. 453.
- Chandrasekhar S. — In: General Relativity, An Einstein Centenary Survey/Eds. S.W. Hawking, W. Israel. — Cambridge Univ. Press, 1979b, p. 370.
- Chandrasekhar S. The Mathematical Theory of black holes — Oxford, Clarendon Press, 1983. Рус. пер.: Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. — М.: Мир, 1986.

- Chandrasekhar S., Detweiler S. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1975a, v. 344, p. 441.
 Chandrasekhar S., Detweiler S. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1975b, v. 345, p. 145.
 Chandrasekhar S., Detweiler S. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1976, v. 350, p. 165.
 Chandrasekhar S., Hartle J.B. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1982, v. 384, p. 301.
 Chandrasekhar S., Xanthopoulos B.S. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1979, v. 367, p. 1.
 Chase J.E. — Commun. Math. Phys., 1970, v. 19, p. 276.
 Chitre D.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 2713.
 Cho Y.M., Freund P.G.O. — Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, p. 1588.
 Chodos A., Detweiler S. — GRG, 1982, v. 14, p. 879.
 Christensen S.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 14, p. 2490.
 Christensen S.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 17, p. 946.
 Christensen S.M., Fulling S.A. — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 2088.
 Christodoulou D. — Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 1596.
 Christodoulou D. — Commun. Math. Phys., 1984, v. 93, p. 171.
 Chrzanowski P.L., Misner C.W. — Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 10, p. 1701.
 Clarke C.J.S. — Commun. Math. Phys., 1973, v. 32, p. 205.
 Clarke C.J.S. — GRG, 1975, v. 6, p. 35.
 Clarke C.J.S. — Commun. Math. Phys., 1976, v. 49, p. 17.
 Cohen J.M., Wald R.M. — J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 1845.
 Copson E.T. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1928, v. 118, p. 184.
 Courant R. Partial differential equations. — N.Y. — London, 1962. Рус. пер.: Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1969.
 Dadlich N. — Phys. Lett. Ser. A, 1983, v. 98, p. 103.
 Damour T. — Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 18, p. 3598.
 Damour T. These de Doctorat d'etat. — Univ. Paris VI, 1979.
 Damour T. — In: Proceeding of the Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity/Ed. R. Ruffini. — Amsterdam, North-Holland, 1982.
 Damour T. — In: Gravitational Radiation/Eds. N. Deruelle and T. Piran — Amsterdam, North-Holland, 1983, p. 59.
 Damour T., Deruelle N., Ruffini R. — Lett. Nuovo Cim., 1976, v. 15, p. 257.
 Damour T., Ruffini R. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 463.
 Davies P.C.W. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1976, v. 351, p. 129.
 Davies P.C.W. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1977, v. 353, p. 499.
 Davies P.C.W., Fulling S.A., Unruh W.G. — Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 2720.
 Davis M., Ruffini R., Price R. — Phys. Rev. Lett., 1971, v. 27, p. 1466.
 Davis M., Ruffini R., Tiomno J. — Phys. Rev. Ser. D, 1972, v. 5, p. 2932.
 D'Eath P.D. — Phys. Rev. Ser. D, 1975a, v. 11, p. 1387.
 D'Eath P.D. — Phys. Rev. Ser. D, 1975b, v. 12, p. 2183.
 D'Eath P.D. — Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 18, p. 990.
 D'Eath P.D. Perturbation Methods for Interactions between strongly self-gravitating systems. — In: Isolated gravitating systems in general relativity, Enrico Fermi summer school course LXVII/Ed. J. Ehlers. — North-Holland, 1979.
 De la Cruz V., Israel W. — Nuovo Cim. Ser. A, 1967, v. 51, p. 744.
 Demianski M., Grishchuk L.P. — GRG, 1974, v. 5, p. 673.
 Demianski M., Novikov I.D. — GRG, 1982, v. 14, p. 439.
 Detweiler S. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1977, v. 352, p. 381.
 Detweiler S. — In: Sources of Gravitational Radiation/Ed. L. Smarr. — Cambridge Univ. Press, 1979.
 Detweiler S. — Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 22, p. 2323.
 Detweiler S.L., Ipser J.R. — Astrophys. J., 1973, v. 185, p. 675.
 Detweiler S.L., Szedenitz E. — Astrophys. J., 1979, v. 231, p. 211.
 De Witt B.S. Dynamical Theory of Group and Fields. — Gordon and Breach, New York, 1965.
 De Witt B.S. — Phys. Repts. Ser. C, 1975, v. 19, p. 297. Рус. пер.: В кн.: Черные дыры. М.: Мир, 1978, с. 66.
 Dhuraudhar S.V., Dadlich N. — Phys. Rev. Ser. D, 1984a, v. 29, p. 2712.
 Dhuraudhar S.V., Dadlich N. — Phys. Rev. Ser. D, 1984b, v. 30, p. 1625.
 Dobiasch P., Maison D. — GRG, 1982, v. 14, p. 231.
 Dolgov A.D. — Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 1042.
 Dolgov A.D., Zel'dovich Ya.B. — Rev. Mod. Phys., 1981, v. 53, p. 1.

- Duff M.J. — Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 125, p. 334.
- Eardly D.M. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 442.
- Eardly D.M., Press W.H. — Annual Review of Astron. and Astrophys., 1975, v. 11, p. 381.
- Eddington A.S. — Nature, 1924, v. 113, p. 192.
- Edelstein L.A., Vishveshwara C.D. — Phys. Rev. Ser. D, 1970, v. 1, p. 3514.
- Einstein A., Infeld L., Hoffman B. — Ann. Math., 1938, v. 39, p. 65.
- Einstein A., Rosen N. — Phys. Rev., 1935, v. 48, p. 73.
- Elster T. — Phys. Lett. Ser. A, 1982a, v. 89, p. 125.
- Elster T. — Phys. Lett. Ser. A, 1982b, v. 93, p. 58.
- Elster T. — J. Phys. Ser. A, 1983a, v. 16, p. 989.
- Elster T. — Phys. Lett. Ser. A, 1983b, v. 94, p. 205.
- Elster T. — Class. Quant. Grav., 1984, v. 1, p. 43.
- Ernst F.J. — Phys. Rev., 1968a, v. 167, p. 1175.
- Ernst F.J. — Phys. Rev., 1968b, v. 168, p. 1415.
- Ernst F.J. — J. Math. Phys., 1976a, v. 17, p. 54.
- Ernst F.J. — J. Math. Phys., 1976b, v. 17, p. 515.
- Ernst F.J., Wild W.J. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 182.
- Fackerell E.D., Crossman R.G. — J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 1849.
- Fackerell E.D., Crossman R.G. — In: Proceedings of the Einstein Centenary Summer School on Gravitational Radiation and Collapsed Objects. — Perth, Western Australia, 1979.
- Fawcett M.S. — Commun. Math. Phys., 1983, v. 89, p. 103.
- Fawcett M.S., Whiting B. — In: Quantum Structure of Space and Time/Eds. M.J. Duff and C.J. Isham. — Cambridge Univ. Press, 1982.
- Fermi E. — Nuovo Cim., 1921, v. 22, p. 176.
- Finkelstein D. — Phys. Rev., 1958, v. 110, p. 965.
- Flamm L. — Phys. Z., 1916, b. 17, s. 448.
- Frolov V.P. — GRG, 1978, v. 9, p. 569.
- Frolov V.P. — GRG, 1979, v. 10, p. 833.
- Frolov V.P. — Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 1349.
- Frolov V.P. — Phys. Rev. Ser. D, 1982, v. 26, p. 954.
- Frolov V.P. — In: Quantum Gravity/Eds. M.A. Markov and P.C. West. — Plenum Press, N.Y. and London, 1983, p. 303.
- Frolov V.P., Garcia A.D. — Phys. Lett. Ser. A, 1983, v. 99, p. 421.
- Frolov V.P., Sanchez N. Vacuum energy-momentum tensor near static distorted black hole. — Preprint, Observatoire de Paris, Meudon, 1985; Phys. Rev., 1986, v. 33, p. 1604.
- Frolov V.P., Vilkovisky G.A. — Preprint IC/79/69, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, 1979.
- Frolov V.P., Vilkovisky G.A. — Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 106, p. 307.
- Frolov V.P., Vilkovisky G.A. — In: Proceedings of the Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity/Ed. R. Ruffini. — North-Holland, 1982, p. 455.
- Frolov V.P., Vilkovisky G.A. — In: Quantum Gravity/Eds. M.A. Markov and P.C. West. — Plenum Press, N.Y. and London, 1983, p. 267.
- Frolov V.P., Zel'nikov A.I. — In: Abstracts of contributed papers of the 9th Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation. — Jena, DDR, 1980, v. 3, p. 555.
- Frolov V.P., Zel'nikov A.I. — Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 115, p. 372.
- Frolov V.P., Zel'nikov A.I. — Phys. Lett. Ser. B, 1983, v. 123, p. 197.
- Frolov V.P., Zel'nikov A.I. — Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 29, p. 1057.
- Frolov V.P., Zel'nikov A.I. — In: Quantum Gravity. Proceedings of the Third Seminar on Quantum Gravity, Moscow/Eds. V.A. Berezin, V.P. Frolov, M.A. Markov. — World Sci. Publ. Comp., Singapore, 1985a.
- Frolov V.P., Zel'nikov A.I. — Phys. Rev. Ser. D, 1985b, v. 32, p. 3150.
- Fronsdal C. — Phys. Rev., 1959, v. 116, p. 778.
- Fry J.N., Olive K.A., Turner M.S. — Phys. Rev. Ser. D, 1980a, v. 22, p. 2953.
- Fry J.N., Olive K.A., Turner M.S. — Phys. Rev. Ser. D, 1980b, v. 22, p. 2977.
- Fry J.N., Olive K.A., Turner M.S. — Phys. Rev. Lett., 1980c, v. 45, p. 2074.
- Fulling S.A. — J. Phys. Ser. A, 1977a, v. 10, p. 917.
- Fulling S.A. — Phys. Rev. Ser. D, 1977b, v. 15, p. 2411.
- Gal'tsov D.V. — J. Phys. Ser. A, 1982, v. 15, p. 3737.
- Gal'tsov D.V., Petukhov V.I., Aliiev A.N. — Phys. Lett. Ser. A, 1984, v. 105, p. 346.

- Gerlach U.H. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 1.
- Gerlach U.H. — Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 11, p. 2762.
- Gerlach U.H. — Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 14, p. 1479.
- Geroch R.P. — J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 450.
- Geroch R.P., Hartle J.B. — J. Math. Phys., 1982, v. 23, p. 680.
- Geroch R.P., Kronheimer E.H., Penrose R. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1972, v. 327, p. 545.
- Geroch R.P., Liang C.B., Wald R.M. — J. Math. Phys., 1982, v. 23, p. 432.
- Gibbons G.W. — Commun. Math. Phys., 1972, v. 27, p. 87.
- Gibbons G.W. — Commun. Math. Phys., 1974, v. 35, p. 13.
- Gibbons G.W. — Commun. Math. Phys., 1975, v. 44, p. 245.
- Gibbons G.W. — Mon. Not. RAS, 1976, v. 177, p. 37P.
- Gibbons G.W. — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 3530.
- Gibbons G.W. — Nucl. Phys., Ser. B, 1982, v. 207, p. 337.
- Gibbons G.W. Aspects of Supergravity. — Preprint, D.A.M.T.P., Cambridge, 1984.
- Gibbons G.W., Hull C.M. — Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 109, p. 190.
- Gibbons G.W., Perry M.J. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 985.
- Gibbons G.W., Perry M.J. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1978, v. 358, p. 467.
- Gibbons G.W., Wiltshire D.L. Black holes in Kaluza — Klein-Theory. — Preprint, D.A.M.T.P., Cambridge, 1985.
- Glass E.N., Harpaz A. — Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 3038.
- Goldreich P., Julian W.H. — Astrophys. J., 1969, v. 157, p. 869.
- Graves J.C., Brill D.R. — Phys. Rev., 1960, v. 120, p. 1507.
- Gürsel Y. et al. — Phys. Rev. Ser. D, 1979a, v. 19, p. 413.
- Gürsel Y. et al. — Phys. Rev. Ser. D, 1979b, v. 20, p. 1260.
- Hagihara Y. — Jap. J. Astr. Geoph., 1931, v. 86, p. 67.
- Hajicek P., Israel W. — Phys. Lett. Ser. A, 1980, v. 80, p. 9.
- Handler F.A., Matzner R.A. — Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 22, p. 2331.
- Hanni R.S. — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 933.
- Hanni R.S., Ruffini R. — Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 8, p. 3259.
- Hasslacher B., Mottola E. — Phys. Lett. Ser. B, 1981, v. 99, p. 221.
- Hartle J.B. — Phys. Rev. Ser. D, 1971, v. 3, p. 2938.
- Hartle J.B. — In: Magic Without Magic/Ed. J. Klauder. — San Francisco, Freeman, 1972.
- Hartle J.B. — Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 8, p. 1010.
- Hartle J.B. — Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 9, p. 2749.
- Hartle J.B., Hawking S.W. — Commun. Math. Phys., 1972, v. 26, p. 87.
- Hartle J.B., Hawking S.W. — Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 2188.
- Hawking S.W. — Mon. Not. RAS, 1971, v. 152, p. 75.
- Hawking S.W. — Commun. Math. Phys., 1972a, v. 25, p. 152.
- Hawking S.W. — Commun. Math. Phys., 1972b, v. 25, p. 167.
- Hawking S.W. — Commun. Math. Phys., 1973, v. 33, p. 323.
- Hawking S.W. — Nature, 1974, v. 248, p. 30.
- Hawking S.W. — Commun. Math. Phys., 1975, v. 43, p. 199.
- Hawking S.W. — Phys. Rev. Ser. D, 1976a, v. 13, p. 191.
- Hawking S.W. — Phys. Rev. Ser. D, 1976b, v. 14, p. 2460.
- Hawking S.W. — Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 114, p. 349.
- Hawking S.W. — In: General Relativity, An Einstein Centenary Survey/Eds. S.W. Hawking and W. Israel. — Cambridge Univ. Press, 1979. Рус. пер.: В кн.: Общая теория относительности. — М.: Мир, 1983, с. 233.
- Hawking S.W. — Commun. Math. Phys., 1981, v. 80, p. 421.
- Hawking S.W. — In: Quantum Gravity. Proceedings of the Second Seminar on Quantum Gravity. Moscow/Eds. M.A. Markov, P.C. West. — Plenum Press, 1984, p. 19.
- Hawking S.W., Ellis G.F. The large scale structure of spacetime. — Cambridge Univ. Press, 1973. Рус. пер.: Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977.
- Hawking S.W., Hartle J.B. — Commun. Math. Phys., 1972, v. 27, p. 283.
- Hawking S.W., Penrose R. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1970, v. 314, p. 529.
- Hawking S.W., Page D.N., Pope C.N. — Phys. Lett. Ser. B, 1979, v. 86, p. 175.
- Hawking S.W., Page D.N., Pope C.N. — Nucl. Phys. Ser. B, 1980, v. 170, p. 283.
- Hiscock W.A. — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 2673.
- Hiscock W.A. — Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 23, p. 2813.

- Hiscock W.A. — Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, p. 1734.
Howard K.W. — Phys. Rev. Ser. D., 1984, v. 30, p. 2532.
Howard K.W., Candelas P. — Phys. Rev. Lett., 1984, v. 53, p. 403.
Hut P. — Mon. Not. RAS, 1977, v. 180, p. 379.
Isaacson R.A. — Phys. Rev. 1968a, v. 166, p. 1263.
Isaacson R.A. — Phys. Rev. 1968b, v. 166, p. 1272.
Israel W. — Phys. Rev., 1967, v. 164, p. 1776.
Israel W. — Commun. Math. Phys., 1968, v. 8, p. 245.
Israel W. — GRG, 1971, v. 2, p. 53.
Israel W. — Lett. Nuovo Cim., 1973, v. 6, p. 267.
Israel W. — Sci. Prog. Oxf., 1983, v. 68, p. 333.
Israel W. — Found. Phys., 1984, v. 14, p. 1049.
Israel W. — Can. J. Phys., 1985, v. 63, p. 34.
Israel W., Khan K.A. — Nuovo Cim., 1964, v. 33, p. 331.
Iyer B.R., Kumar A. — Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 18, p. 4799.
Jano K., Bochner S. Curvature and Betti numbers. — Princeton Univ. Press, 1953.
Рус. пер.: Яно К., Бокнер С. Кривизна и числа Бетти. — М.: ИЛ, 1957.
Jordan P., Ehlers J., Sachs R. — Akad. Wiss. Mainz. Abh. Math. — Naturwiss. Kl, 1961, N. 1, p. 2.
Kapusta J.T. — Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 30, p. 831.
Kardashev N.S., Novikov I.D. — In: Early evolution of the universe and its present structure/Ed. G. Abell, G. Chincarini. — D. Reidel. Publ. Company, Simposium N. 104 IAU, Crete, 1982, p. 327.
Kates R.E. — Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 22, p. 1853.
Kates R.E. — Ann. Phys., 1981, v. 132, p. 1.
Kerr R.P. — Phys. Rev. Lett., 1963, v. 11, p. 237.
Kihara M., Tomimatsu A. — Progr. Theor. Phys., 1982, v. 67, p. 349.
King A.R., Lasota J.P. — Astr. Astrophys., 1977, v. 58, p. 175.
Klauder J.R., Sudarshan E.C.G. Fundamentals of Quantum Optics. — W.A. Benjamin Inc., N.Y., 1968. Рус. пер.: Клаудер Дж., Судершан Э. Основы квантовой оптики. — М.: Мир, 1970.
Kodania H. — Progr. Theor. Phys., 1979, v. 62, p. 1434.
Kodania H. — Progr. Theor. Phys., 1980, v. 63, p. 1217.
Kodania H., Sasaki M., Sato K. — Progr. Theor. Phys., 1982, v. 68, p. 1979.
Kojima Y., Nakanura T. — Phys. Lett. Ser. A, 1983, v. 96, p. 335.
Kojima Y., Nakanura T. — Progr. Theor. Phys., 1984a, v. 71, p. 79.
Kojima Y., Nakamura T. — Progr. Theor. Phys., 1984b, v. 72, p. 494.
Kolb E.W., Turner M.S. — Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1983, v. 33.
Kovetz A., Piran T. — Lett. Nuovo Cim., 1975a, v. 12, p. 39.
Kovetz A., Piran T. — Lett. Nuovo Cim., 1975b, v. 12, p. 560.
Kramer D. et al. Exact solutions of the Einstein field equations. — Deutscher Verlag Wiss., Berlin, 1980. Рус. пер.: Крамер Д. и др. Точные решения уравнений Эйнштейна. — М.: Энергоиздат, 1982.
Krori K.D., Chaudhury S., Dowerah S. — Can. J. Phys., 1983, v. 61, p. 1192.
Krori K.D., Chaudhury S., Dowerah S. — J. Math. Phys., 1984, v. 25, p. 607.
Kruskal M.D. — Phys. Rev., 1960, v. 119, p. 1743.
Kulkarni A.D. — J. Math. Phys., 1984, v. 25, p. 1028.
Kulkarni A., Shepley L., York J. — Phys. Lett. Ser. A, 1983, v. 96, p. 228.
Kundt W., Trümper M. — Z. Phys., 1966, v. 192, s. 419.
Kuroda Y. — Progr. Theor. Phys., 1984a, v. 71, p. 1422.
Kuroda Y. — Progr. Theor. Phys., 1984b, v. 72, p. 63.
Lake K. — Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 19, p. 421.
Lake K., Hellaby C. — Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 24, p. 3019.
Leahy D.A., Unruh W.G. — Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 19, p. 3509.
Lèaute B., Linet B. — Phys. Lett. Ser. A, 1976, v. 58, p. 5.
Lèaute B., Linet B. — J. Phys. Ser. A, 1982, v. 15, p. 1821.
Lee C.H. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 1226.
Lemaître G. — Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. A, 1933, v. 53, p. 51.
Lindquist R. — J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 938.
Linet B. — J. Phys. Ser. A, 1976, v. 9, p. 1081.

- Linett B.* — C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, 1977a, v. 284, p. 215.
- Linett B.* — C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, 1977b, v. 284, p. 1167.
- Linett B.* — J. Phys. Ser. A, 1979, v. 12, p. 839.
- Lohiya D.* — J. Phys. Ser. A, 1982, v. 15, p. 1815.
- Lovelace R.V.E.* — Nature, 1976, v. 262, p. 649.
- Lovelace R.V.E., MacAuslan J., Burns M.* — In: Proceedings of La Jolla Institute Workshop on Particle Acceleration Mechanisms in Astrophys. — American Ins. of Phys., N.Y., 1979.
- Ludvigsen M., Vickers J.A.G.* — J. Phys. Ser. A, 1983, v. 16, p. 1169.
- Macdonald D.A., Thorne K.S.* — Mon. Not. RAS, 1982, v. 198, p. 345.
- Macdonald D.* Preprint GRP-002. — Caltech, 1984.
- Macdonald D., Suen W.-M.* — Phys. Rev. Ser. D, 1985, v. 32, p. 848.
- Maeda K. et al.* — Phys. Lett. Ser. B, 1982, v. 108, p. 98.
- Markov M.A.* — Suppl. Progr. Theor. Phys. Extra Number, 1965, p. 85.
- Markov M.A.* — Ann. Phys., 1970, v. 59, p. 109.
- Markov M.A.* Cosmology and elementary particles. — Preprint IC/71/33 Trieste, Italy, 1971.
- Markov M.A.* — In: Gravitational Radiation and Gravitational Collapse/Ed. C. De Witt. — Morette — Dordrecht — Boston, D. Reidel, 1974, p. 106.
- Markov M.A.* On the upper limit of the cosmic rays energy spectrum (DUMAND type experiments). — Preprint P-0197 INR, Moscow, 1981a.
- Markov M.A.* Maximon-type scenario of the Universe. — Preprint P-0207 INR, Moscow, 1981b.
- Markov M.A.* On the maximon and concept of elementary particles. — Preprint P-0208 INR, Moscow, 1981c.
- Markov M.A., Zheleznykh I.M.* — In: Proc. of the 1979 DUMAND Summer Workshop at Khabarovsk and Lake Baikal/Ed. J. Learned. — Hawaii DUMAND Centre, Univ. of Hawaii, 1981, p. 177.
- Martellini M., Treves A.* — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 3060.
- Mashhoon B.* — Astrophys. J. Lett., 1973, v. 181, p. L65.
- Matzner R.A. et al.* — Phys. Rev. Ser. D, 1985, v. 31, p. 1869.
- Matzner R.A., Zamorano N., Sandberg V.D.* — Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 19, p. 2821.
- Mazur P.O.* — J. Phys. Ser. A, 1982, v. 15, p. 3173.
- Mazur P.O.* — GRG, 1984, v. 16, p. 211.
- McCarthy P.J.* — J. Math. Phys., 1972a, v. 13, p. 1837.
- McCarthy P.J.* — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1972b, v. 330, p. 517.
- McCarthy P.J.* — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1973, v. 333, p. 317.
- McCarthy P.J., Crampin M.* — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1973, v. 335, p. 310.
- McNamara J.M.* — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1978a, v. 358, p. 499.
- McNamara J.M.* — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1978b, v. 364, p. 121.
- Miller J.G.* — J. Math. Phys., 1979, v. 20, p. 1345.
- Misner C.W.* — Phys. Rev., 1960, v. 118, p. 1110.
- Misner C.W.* — Ann. Phys., 1963, v. 24, p. 102.
- Misner C.W.* — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 994.
- Misner C.W.* — Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 18, p. 4510.
- Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.* Gravitation. — Freeman and Company, San Francisco, 1973. Рус. пер.: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. — М.: Мир, 1977.
- Misner C.W., Wheeler J.A.* — Ann. Phys., 1957, v. 2, p. 594.
- Misra R.M.* — Progr. Theor. Phys., 1977, v. 58, p. 1205.
- Moncriff V.* — Ann. Phys., 1974a, v. 88, p. 323.
- Moncriff V.* — Phys. Rev. Ser. D, 1974b, v. 9, p. 2707.
- Moncriff V.* — Phys. Rev. Ser. D, 1974c, v. 10, p. 1057.
- Moncriff V.* — Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, p. 1526.
- Moss I.G.* Black hole bubbles. — Preprint, Univ. of Newcastle, Newcastle upon Tyne, 1984.
- Müller zum Hagen H.* — Proc. Camb. Phil. Soc., 1970, v. 67, p. 415.
- Müller zum Hagen H., Robinson D.C., Seifert H.J.* — GRG, 1973, v. 4, p. 53.
- Mysak L., Szekeres G.* — Can. J. Phys., 1966, v. 44, p. 617.
- Nadejin D.K., Novikov I.D., Polnarev A.G.* — In: Abstracts of contributed Papers GR8. — Waterloo, Canada, 1977, p. 382.
- Nakamura T., Haugan M.* — Astrophys. J., 1983, v. 269, p. 292.
- Nakamura T., Sasaki M.* — Phys. Lett. Ser. A, 1981, v. 89, p. 185.
- Nakamura T., Sato H.* — Phys. Lett. Ser. B, 1976, v. 61, p. 371.

- Ne'eman Y. — *Astrophys. J.*, 1965, v. 141, p. 1303.
- Newman E., Penrose R. — *J. Math. Phys.*, 1962, v. 3, p. 566.
- Nieuwenhuizen van P., Wilkinson D., Perry M.J. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1976, v. 13, p. 778.
- Nityananda R., Narayan R. — *Phys. Lett. Ser. A*, 1981, v. 82, p. 1.
- Nordström G. — *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 1918, v. 20, p. 1238.
- Novikov I.D. et al. — *Astron. Astrophys.*, 1979, v. 80, p. 104.
- Novikov I.D., Starobinsky A.A. — In: Abstracts of contributed papers of the 9-th Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation. — Jena, DDR. 1980a, p. 268.
- Novikov I.D., Starobinsky A.A. Preprint of the Space Research Institute, Pr-585. — Moscow, 1980b.
- Novikov I.D., Zel'dovich Ya.B. — *Nuovo Cim. Suppl.*, 1966, v. 4, p. 810.
- Nugaev R.M. — *Phys. Lett. Ser. A*, 1982, v. 91, p. 216.
- Ohta T., Kimura T. — *Progr. Theor. Phys.*, 1982, v. 68, p. 1175.
- Oohara K. — Preprint KUNS-702, 1983.
- Oohara K., Nakamura T. — *Progr. Theor. Phys.*, 1983, v. 70, p. 757.
- Oohara K., Nakamura T. — *Progr. Theor. Phys.*, 1984, v. 71, p. 91.
- Oohara K., Sato H. — *Progr. Theor. Phys.*, 1981, v. 65, p. 1891.
- Oppenheimer J.R., Snyder H. — *Phys. Rev.*, 1939, v. 56, p. 455.
- Papangaden P., Wald R.M. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1977, v. 16, p. 929.
- Page D.N. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1976a, v. 13, p. 198.
- Page D.N. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1976b, v. 14, p. 3260.
- Page D.N. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1976c, v. 14, p. 1509.
- Page D.N. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1977, v. 16, p. 2402.
- Page D.N. — *Phys. Rev. Lett.*, 1980, v. 44, p. 301.
- Page D.N. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1982, v. 25, p. 1499.
- Page D.N. — *Phys. Rev. Lett.*, 1983, v. 50, p. 1013.
- Papadopoulos D., Xanthopoulos B.C. — *Nuovo Cim. Ser. B*, 1984, v. 83, p. 113.
- Penrose R. — *Phys. Rev. Lett.*, 1963, v. 10, p. 66.
- Penrose R. — In: *Relativity, Groups and Topology*/Eds. C. De Witt and B. De Witt. — N.Y. — London, 1964, p. 565. Рус. пер.: В кн.: Гравитация и относительность. — М.: Мир, 1966, с. 152.
- Penrose R. — *Phys. Rev. Lett.*, 1965a, v. 14, p. 57.
- Penrose R. — *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1965b, v. 284, p. 159.
- Penrose R. *Structure of Space — Time*. — In: *Battelle Rencontres*/Eds. C.M. De Witt and J.A. Wheeler. — N.Y., Benjamin, 1968. Рус. пер.: Пенроуз Р. Структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977.
- Penrose R. — *Rev. del Nuovo Cim.*, 1969, v. 1, p. 252.
- Penrose R. — In: *Seminar at Cambridge University*. — Cambridge Univ., 1974.
- Penrose R. — In: *Differential Geometry and Relativity*/Eds. Cahen and Flato. — Reidel Publ. Comp., 1976.
- Penrose R. — In: *Theoretical Principles in Astrophysics and General Relativity*/Eds. N.R. Lebovitz et al. — Univ. Chicago Press, Chicago, 1978, p. 217.
- Penrose R. — In: *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*/Eds. S.W. Hawking and W. Israel. — Cambridge Univ. Press, 1979. Рус. пер.: В кн.: Общая теория относительности. — М.: Мир, 1983, с. 233.
- Petric L.I., Shapiro S.L., Wasserman I. Gravitational radiation from nonspherical infall into black holes. II. — Preprint, Cornell Univ., CRSR-825, 1985.
- Phinney S. — PND thesis, Cambridge, 1983.
- Piran T., Shaham J. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1977, v. 16, p. 1615.
- Piran T., Shaham J., Katz J. — *Astrophys. J. Lett.*, 1975, v. 196, p. L107.
- Pirani F.A.E. — *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1959, v. 252, p. 96.
- Pirani F.A.E. — In: *Lectures on General Relativity*. — Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, 1964, v. 1, p. 249.
- Pollard D. — *J. Phys. Ser. A*, 1983, v. 16, p. 565.
- Press W.H. — *Astrophys. J.*, 1972, v. 175, p. 243.
- Press W.H., Bardeen J.M. — *Phys. Rev. Lett.*, 1971, v. 27, p. 1303.
- Press W.H., Teukolsky S.A. — *Nature*, 1972, v. 238, p. 211.
- Press W.H., Teukolsky S.A. — *Astrophys. J.*, 1973, v. 185, p. 649.
- Price R.H. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1972a, v. 5, p. 2419.
- Price R.H. — *Phys. Rev. Ser. D*, 1972b, v. 5, p. 2439.

- Price R.H., Thorne K.S. — Phys. Rev. Ser. D, 1986, v. 33, p. 915.
- Redmount I.H. — Preprint, Kyoto University, RIFP-584, 1984.
- Rees M.J. — In: Proceedings of AIP Conference "The Galactic Center"/Eds. G.R.Reigler, R.D.Blandford. — Caltech, N.Y., 1982, p. 166.
- Rees M.J. et al. — Nature, 1982, v. 295, p. 17.
- Regge T., Wheeler J.A. — Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 1063.
- Reissner H. — Ann. Physik, 1916, v. 50, p. 106.
- Rindler W. — Am. J. Phys., 1966, v. 34, p. 1174.
- Robinson D.C. — Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 905.
- Robinson D.C. — GRG, 1977, v. 8, p. 695.
- Roman T.A., Bergmann P.G. — Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 28, p. 1265.
- Ruderman M., Sutherland P.G. — Astrophys. J., 1975, v. 196, p. 51.
- Ruffini R. — Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 7, p. 972.
- Ruffini R. — In: Astrofisica e Cosmologia Gravitazione, Quanti e Relatività. — Giunti Barbera, Firenze, 1979. Рус. пер.: В кн.: Астрофизика, кванты и теория относительности. — М.: Мир, 1982, с. 397.
- Ruffini R., Wheeler J.A. — In: Proceedings of the Conference on space physics. European Space Research Organization. — Paris, 1971.
- Ruffini R., Wilson J.R. — Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, p. 2959.
- Sachs R.K. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1961, v. 264, p. 309.
- Sachs R.K. — Phys. Rev., 1962, v. 128, p. 2851.
- Sachs R.K. — In: Relativity, Groups and Topology/Eds. C. De Witt, B. De Witt. — N.Y. — London, 1964.
- Sanchez N. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 688.
- Sanchez N. — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 937.
- Sanchez N. — Phys. Rev. Ser. D, 1978a, v. 18, p. 1030.
- Sanchez N. — Phys. Rev. Ser. D, 1978b, v. 18, p. 1798.
- Sasaki M., Nakamura T. — Phys. Lett. Ser. A, 1981, v. 89, p. 68.
- Sato H. Multiple Kerr metric solutions of Einstein's field equations. — Preprint RIFP-527, Kyoto Univ., 1983.
- Sato H. et al. — Progr. Theor. Phys., 1981, v. 65, p. 1443.
- Schmidt B.G. — GRG, 1971, v. 1, p. 269.
- Schwarzschild K. — Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech., 1916, s. 189.
- Schwinger J.S. — Phys. Rev., 1951, v. 82, p. 664.
- Schwinger J.S. — Phys. Rev., 1954, v. 94, p. 1352.
- Sciama D.W. — Vistas Astron., 1976, v. 19, p. 385. Рус. пер.: В кн.: Черные дыры. — М.: Мир, 1978, с. 31.
- Sciama D.W. — In: Quantum Gravity 2 (A Second Oxford Symposium)/Eds. C.J.Isham, P.Penrose, D.W.Sciama. — Oxford Univ., Oxford, 1981.
- Sciama D.W., Candelas P., Deutsch D. — Advances in Phys., 1981, v. 30, p. 327.
- Sextl P.U. — Acta Phys. Austriaca Ser. B, 1975, v. 42, p. 303.
- Shapiro S.L., Teukolsky S.A. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars. — A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and sons, 1983.
- Shapiro S.L., Wasserman I. — Preprint Cornell University CRSR, 1982, p. 783.
- Smarr L. — Phys. Rev. Lett., 1973a, v. 30, p. 71.
- Smarr L. — Phys. Rev. Ser. D, 1973b, v. 7, p. 289.
- Smarr L. — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 2069.
- Smarr L. — In: Sources of Gravitational Radiation/Ed. L.Smarr. — Cambridge Univ. Press, 1979.
- Smarr L. et al. — Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 14, p. 2443.
- Smith A.G., Will C.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 22, p. 1276.
- Sokolowski L.M., Mazur P. — J. Phys. Ser. A, 1980, v. 13, p. 1113.
- Steinmüller B., King A.R., Lasota J.P. — Phys. Lett. Ser. A, 1975, v. 51, p. 191.
- Stewart J. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1975, v. 344, p. 65.
- Stewart J., Walker M. — In: Springer tracts in modern physics. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, N.Y., 1973, v. 69, p. 69.
- Syngé J.L. — Proc. Roy. Irish. Acad. Ser. A, 1950, v. 53, p. 83.
- Szekeres G. — Publ. Mat. Debrecen, 1960, v. 7, p. 285.
- Szillard L. — Z. Phys., 1929, v. 53, p. 840.

- Tamburino L.A., Winicour J.H. — Phys. Rev., 1966, v. 150, p. 1039.
- Teitelboim C. — Nuovo Cim. Ser. II, 1972a, v. 3, p. 397.
- Teitelboim C. — Phys. Rev. Ser. D, 1972b, v. 5, p. 2941.
- Teitelboim C. — Nuovo Cim. Lett. Ser. II, 1972c, v. 3, p. 326.
- Teukolsky S.A. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 1114.
- Teukolsky S.A. — Astrophys. J., 1973, v. 185, p. 635.
- Teukolsky S.A., Press W.H. — Astrophys. J., 1974, v. 193, p. 443.
- Thirring H., Lense J. — Phys. Z., 1918, v. 19, p. 156.
- Thorne K.S. — In: Magic without Magic: John Archibald Wheeler /Ed. J.Klauder. — San Francisco, W.H. Freeman and D., 1972, p. 231.
- Thorne K.S. General relativity Astrophysics. — Preprint, Caltech, OAP-462, 1976.
- Thorne K.S. Black holes: The membrane viewpoint. — Preprint, Caltech, GRP-031, 1985.
- Thorne K.S. — In: Highlights of Modern Astrophysics/Eds. S.L.Shapiro, S.A.Teukolsky. — N.Y., Wiley, 1986.
- Thorne K.S., Blandford R.D. — In: Extragalactic Radio Sources/Eds. D.Heeschen, C.Wade, 1982, p. 255.
- Thorne K.S., Hartle J.B. — Phys. Rev. Ser. D, 1985, v. 31, p. 1815.
- Thorne K.S., Macdonald D.A. — Mon. Not. RAS, 1982, v. 198, p. 339.
- Thorne K.S., Price R.H., Macdonald D.A. Black Holes: the Membrane Paradigm. — Yale Univ. Press, New Haven, 1986.
- Tipler F.J., Clarke C.J.S., Ellis G.F.R. Singularities and Horizons. — A Review Article. — In: General Relativity and Gravitation: One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein/Ed. A.Held. — Plenum Press, New York, 1980, v. II.
- Tolman R.G. — Proc. Nat. Acad. Sci. US, 1934, v. 20, p. 169.
- T'Hoofst G. — Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 79, p. 276.
- Tomboulis E. — Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 97, p. 77.
- Tomimatsu A. — Progr. Theor. Phys., 1983, v. 70, p. 385.
- Tomimatsu A. — Phys. Lett. Ser. A, 1984, v. 103, p. 374.
- Tomimatsu A., Kihara M. — Progr. Theor. Phys., 1982, v. 67, p. 1406.
- Toop N. — Preprint D.A.M.T.P. — Cambridge Univ., Cambridge, 1976.
- Unruh W.G. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1265.
- Unruh W.G. — Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 10, p. 3194.
- Unruh W.G. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1976a, v. 348, p. 447.
- Unruh W.G. — Phys. Rev. Ser. D, 1976b, v. 14, p. 870.
- Unruh W.G. — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 365.
- Unruh W.G. — Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 1351.
- Unruh W.G., Wald R.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1982, v. 25, p. 942.
- Unruh W.G., Wald R.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1983a, v. 27, p. 2271.
- Unruh W.G., Wald R.M. — GRG, 1983b, v. 15, p. 195.
- Unruh W.G., Wald R.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 29, p. 1047.
- Vilenkin A. — Phys. Rev. Ser. D, 1979a, v. 20, p. 373.
- Vilenkin A. — Phys. Rev. Ser. D, 1979b, v. 20, p. 1807.
- Vishveshwara C.V. — J. Math. Phys., 1968, v. 19, p. 1319.
- Wald R.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1972, v. 6, p. 406.
- Wald R.M. — Ann. Phys., 1974a, v. 82, p. 548.
- Wald R.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1974b, v. 10, p. 1680.
- Wald R.M. — Astrophys. J., 1974c, v. 191, p. 231.
- Wald R.M. — Commun. Math. Phys., 1975, v. 45, p. 9.
- Wald R.M. — Commun. Math. Phys., 1977, v. 54, p. 1.
- Wald R.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1978a, v. 17, p. 1477.
- Wald R.M. — Ann. Phys., 1978b, v. 110, p. 472.
- Wald R.M. — J. Math. Phys., 1979a, v. 20, p. 1056.
- Wald R.M. — Phys. Rev. Ser. D, 1979b, v. 20, p. 1271.
- Wald R.M. — J. Math. Phys., 1980, v. 21, p. 218.
- Wald R.M. General Relativity. — Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984.
- Walker M. — J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 2280.
- Walker M., Penrose R. — Commun. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 265.
- Warner N.P. — Commun. Math. Phys., 1982, v. 86, p. 419.
- Weyl H. — Ann. Physik, 1917, v. 54, p. 117.

- Wheeler J.A. – Phys. Rev., 1955, v. 97, p. 511.
- Wheeler J.A. – Am. Sci., 1968, v. 59, p. 1.
- Wild W.J., Kerns R.M. – Phys. Rev. Ser. D, 1980, v. 21, p. 332.
- Wild W.J., Kerns R.M., Drish W.J. – Phys. Rev. Ser. D, 1981, v. 23, p. 829.
- Will C.M. Theory and experiment in gravitational physics. – Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981. Рус. пер.: Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. – М.: Энергониздат, 1985.
- Xanthopoulos B.C. – Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1983, v. 388, p. 117.
- Yamazaki M. – Phys. Rev. Lett., 1983a, v. 50, p. 1027.
- Yamazaki M. – Progr. Theor. Phys., 1983b, v. 69, p. 503.
- Yang P.S. – Phys. Rev. Ser. D, 1979, v. 20, p. 834.
- Yasskin P.B. – Phys. Rev. Ser. D, 1975, . 12, p. 2212.
- Yodzis P., Seifert H.J., Müller zum Hagen H. – Commun. Math. Phys., 1973, v. 34, p. 135.
- Yodzis P., Seifert H.J., Müller zum Hagen H. – Commun. Math. Phys., 1974, v. 37, p. 29.
- York Jr. J.W. – Phys. Rev. Ser. D, 1983, v. 28, p. 2929.
- York Jr. J.W. – Phys. Rev. Ser. D, 1985, v. 31, p. 775.
- Young P.Y. – Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 14, p. 12.
- Zannias T. – Phys. Rev. Ser. D, 1984, v. 30, p. 1161.
- Zaumen W.T. – Nature, 1974, v. 247, p. 530.
- Zerilli F.G. – Phys. Rev. Ser. D, 1970a, v. 2, p. 2141.
- Zerilli F.G. – Phys. Rev. Lett., 1970b, v. 24, p. 737.
- Zerilli F.G. – Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 9, p. 860.
- Znajek R.L. – Mon. Not. RAS, 1978, v. 185, p. 833.
- Zouros T.J., Eardley D.M. – Ann. Phys., 1979, v. 118, p. 139.
- Zurek W.H. – Phys. Rev. Lett., 1982, v. 49, p. 1683.
- Zurek W.H., Thorne K.S. – Preprint, Caltech, GRP-033, 1985.

Айер	(Iyer)	Героч	(Geroch)
Айзааксон	(Isaacson)	Гиббонс	(Gibbons)
Айхельбург	(Aichelburg)	Гласс	(Glass)
Арновитт	(Arnowitt)	Голд	(Gold)
Аронс	(Arons)	Гольдрайх	(Goldreich)
Бальбинот	(Balbinot)	Грейвс	(Graves)
Бантинг	(Bunting)	Гурсел	(Gürsel)
Бардин	(Bardeen)	Гювен	(Güven)
Бекенштейн	(Bekenstein)	Дадлих	(Dadlich)
Бербидж	(Burbidge)	Дамур	(Damour)
Бергамини	(Bergamini)	Дафф	(Duff)
Бергман	(Bergmann)	Дворак	(Dvorak)
Биркгоф	(Birkhoff)	Девис	(Davies)
Биррел	(Birrel)	ДеВитт	(DeWitt)
Бичак	(Bicak)	Де ла Круз	(De la Cruz)
Бишоп	(Bishop)	Детвилер	(Detweiler)
Блейер	(Bleyer)	Добиаш	(Dobiasch)
Блендфорд	(Blandford)	Дхираудхар	(Dhuraudhar)
Бовин	(Bovyn)	Д'Эс	(D'Eath)
Бойер	(Boyer)	Жекерес	(Szekeres)
Бонди	(Bondi)	Занниас	(Zannias)
Боуен	(Bowen)	Заумен	(Zaumen)
Бохнер	(Bochner)	Зерилли	(Zerilli)
Браун	(Brown)	Знаек	(Znajek)
Брилл	(Brill)	Зурек	(Zurek)
Бриллюэн	(Brillouin)	Зурос	(Zouros)
Бульвар	(Boulevard)		
Бэрроу	(Barrow)		
Вассерман	(Wasserman)	Израэль	(Israel)
Вейль	(Weyl)	Ипсер	(Ipser)
Викерс	(Vickers)	Йодзис	(Yodzis)
Вилсон	(Wilson)	Йордан	(Jordan)
Вильтшир	(Wiltshire)	Йорк	(York)
Виникур	(Winicour)	Кадерни	(Caderni)
Вишвешвара	(Wishveshwara)	Кальвани	(Calvani)
Гайчек	(Hajicek)	Канделас	(Candelas)
Гарсиа	(Garcia)	Карр	(Carr)
Герлах	(Gerlach)		

Картер	(Carter)	Мизнер	(Misner)
Кернс	(Kerns)	Мнэра	(Misra)
Керр	(Kerr)	Миллер	(Miller)
Кимура	(Kimura)	Монкриф	(Moncriff)
Кинг	(King)	Мосс	(Moss)
Кихара	(Kihara)	Моттола	(Mottola)
Кларк	(Clarke)	Мэзон	(Maison)
Клаудер	(Klauder)	Мюллер	(Müller)
Ковец	(Kovetz)	цум Хаген	zum Hagen)
Кодама	(Kodama)		
Кодос	(Chodos)	Накамура	(Nakamura)
Кожима	(Kojima)	Нараян	(Narayan)
Колб	(Kolb)	Нееман	(Neeman)
Копсон	(Copson)	Нейванхойзен	(Nieuwenhuizen)
Коэн	(Cohen)	Нитьянанда	(Nityananda)
Крамер	(Kramer)	Нордстрем	(Nordström)
Кристенсен	(Christensen)	Ньюмен	(Newman)
Кристодулу	(Christodoulou)		
Крори	(Krori)	Оохара	(Oohara)
Кросман	(Crossman)	Оппенгеймер	(Oppenheimer)
Крускал	(Kruskal)	Оттевилл	(Ottewill)
Крэмпин	(Crampin)	Охта	(Ohta)
Ксантопулос	(Xanthopoulos)		
Кулкарни	(Kulkarni)	Пападопулос	(Papadopoulos)
Кумар	(Kumar)	Папангаден	(Papangaden)
Кундт	(Kundt)	Пенроуз	(Penrose)
Курант	(Courant)	Перри	(Perry)
Курода	(Kuroda)	Петрич	(Petrich)
Кхан	(Khan)	Пирани	(Piran)
Кэйтс	(Kates)	Пирани	(Pirani)
		Поллард	(Pollard)
Лавлейс	(Lovelace)	Прайс	(Price)
Лазота	(Lasota)	Пресс	(Press)
Лейт	(Léaute)	Пэйдж	(Page)
Леметр	(Lemaitre)		
Лензе	(Lense)	Редже	(Regge)
Ли	(Lee)	Редмунт	(Redmount)
Линдквист	(Lindquist)	Рейсснер	(Reissner)
Лине	(Linet)	Риндлер	(Rindler)
Лихи	(Leahy)	Рис	(Rees)
Лохья	(Lohya)	Робинсон	(Robinson)
Лэйк	(Lake)	Розен	(Rosen)
Людвигсен	(Ludvigsen)	Роман	(Roman)
		Рудерман	(Ruderman)
Маеда	(Maeda)	Руффини	(Ruffini)
Мазур	(Mazur)		
Майзелс	(Meisels)	Сакс	(Sachs)
Макдональд	(Macdonald)	Санчес	(Sanchez)
Маккарти	(McCarthy)	Сасаки	(Sasaki)
Макнамара	(McNamara)	Сато	(Sato)
Мартеллини	(Martellini)	Сексл	(Sexl)
Машхун	(Mashhoon)	Сзедениц	(Szedenitz)
Метцнер	(Matzner)	Силк	(Silk)
Мизак	(Myzak)	Синг	(Syngé)
		Смarr	(Smarr)

Смит	(Smith)	Хаджихара	(Hagihara)
Снайдер	(Snyder)	Халл	(Hull)
Соколовский	(Sokolowski)	Хандлер	(Handler)
Стачник	(Stuchlik)	Хаини	(Hanni)
Стейнмюллер	(Steinmüller)	Харпаз	(Harpaz)
Стюарт	(Stewart)	Хартль	(Hartle)
Сударшан	(Sudarschan)	Хаслачер	(Hasslachner)
Сцилард	(Szillard)	Хеллаби	(Hellaby)
Сюзерленд	(Sutherland)	Хискок	(Hiscock)
Сюэн	(Suen)	Ховард	(Howard)
Тамбурино	(Tamburino)	Хоенселаерс	(Hoenselaers)
Тетельбойм	(Teitelboim)	Хокнинг	(Hawking)
Типлер	(Tipler)	Хоуган	(Haugan)
Тирринг	(Thirring)	Хржановский	(Chrzanowski)
Толмен	(Tolman)	Хут	(Hut)
Томбулис	(Tomboulis)	Чандрасекар	(Chandrasekhar)
Томиматсу	(Tomimatsu)	Чейз	(Chase)
Торн	(Thorne)	Читра	(Chitre)
Т'Офт	(T'Hoofst)	Чо	(Cho)
Тревес	(Treves)	Шапиро	(Shapiro)
Трюмпер	(Trümper)	Шахам	(Shaham)
Туп	(Toop)	Шварцшильд	(Schwarzschild)
Турнер	(Turner)	Швингер	(Schwinger)
Тюковский	(Teukolsky)	Шмидт	(Schmidt)
Уайлд	(Wild)	Шьяма	(Sciama)
Уайтинг	(Whiting)	Эддингтон	(Eddington)
Уилер	(Wheeler)	Эдельштейн	(Edelstein)
Уилл	(Will)	Элерс	(Ehlers)
Унру	(Unruh)	Эллис	(Ellis)
Уолд	(Wold)	Эльстер	(Elster)
Уолкер	(Walker)	Эрдли	(Eardley)
Уорнер	(Warner)	Эрнст	(Ernst)
Факерелл	(Fackerell)	Юлиан	(Julian)
Ферми	(Fermi)	Юнг	(Young)
Финкельштейн	(Finkelstein)	Ямазаки	(Yamazaki)
Финней	(Phinney)	Янг	(Yang)
Фламм	(Flamm)	Яно	(Jano)
Фосетт	(Fawcett)	Ясскин	(Yasskin)
Фрай	(Fry)		
Фройнд	(Freund)		
Фронсдел	(Fronsdal)		
Фуллинг	(Fulling)		

Предисловие	3
ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 2. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНАЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА	9
§ 2.1. Сферически-симметричное поле тяготения	9
§ 2.2. Сферически-симметричное поле тяготения в вакууме	10
§ 2.3. Радиальное движение пробных частиц в поле Шварцшильда	13
§ 2.4. Пространство-время внутри сферы Шварцшильда	15
§ 2.5. Сжимающиеся и расширяющиеся T -области	20
§ 2.6. Гравитационный коллапс — возникновение черной дыры. Белые дыры	22
§ 2.7. Вечные черные и белые дыры	25
§ 2.8. Небесная механика в поле тяготения черной дыры	30
§ 2.9. Гравитационный захват	34
§ 2.10. Движение частиц с учетом гравитационного излучения	35
ГЛАВА 3. ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ ВОКРУГ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ	37
§ 3.1. Слабые поля в метрике Шварцшильда	37
§ 3.2. Гравитационные возмущения метрики Шварцшильда	39
§ 3.3. Гравитационное излучение пробной частицы в поле черной дыры	41
§ 3.4. Степенные "хвосты" гравитационного излучения	46
§ 3.5. Сечение рассеяния волн черной дырой	48
ГЛАВА 4. ВРАЩАЮЩАЯСЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА	51
§ 4.1. Возникновение вращающейся черной дыры	51
§ 4.2. " $3 + 1$ "-расщепление пространства-времени вне черной дыры	52
§ 4.3. Хронометрическая система отсчета и система отсчета локально невращающихся наблюдателей	54
§ 4.4. Пространство-время вращающейся черной дыры	60
§ 4.5. Небесная механика вращающейся черной дыры	63
§ 4.6. Гравитационный захват частиц вращающейся черной дырой	66
§ 4.7. Волновые поля вокруг вращающейся черной дыры	67
§ 4.8. Заряженная вращающаяся черная дыра	79
ГЛАВА 5. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЧЕРНЫХ ДЫР	81
§ 5.1. Асимптотически плоские пространства. Диаграммы Пенроуза	81
§ 5.2. Горизонт событий. Теорема Пенроуза	88
§ 5.3. Теорема Элерса—Сакса. Фокусировка световых лучей гравитационным полем	92
§ 5.4. Теорема Хокинга. Принцип космической цензуры	97
§ 5.5. Ловушечные поверхности, горизонты видимости, R - и T -области	100
§ 5.6. Теоремы о сингулярности внутри черных дыр	106

ГЛАВА 6. СТАЦИОНАРНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ	110
§ 6.1. "Черные дыры не имеют волос"	110
§ 6.2. Общие свойства стационарных черных дыр	112
§ 6.3. Теорема единственности для статических черных дыр.	118
§ 6.4. Теорема единственности для стационарных аксиально-симметричных черных дыр	121
§ 6.5. Аналитическое продолжение метрики Керра – Ньюмена внутри горизонта событий	128
§ 6.6. Обобщения теоремы единственности на случай неэлектромагнитных полей.	131
ГЛАВА 7. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР	135
§ 7.1. Уравнения Максвелла	136
§ 7.2. Стационарная электродинамика с осевой симметрией. Бессилочное поле	138
§ 7.3. Граничные условия на горизонте событий. Мембранная трактовка и "растянутый" горизонт	143
§ 7.4. Электромагнитные поля в вакууме в окрестности черных дыр	147
§ 7.5. Магнитосфера черной дыры	150
ГЛАВА 8. ФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ПОЛЕ ЧЕРНЫХ ДЫР. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ	155
§ 8.1. Извлечение энергии из черных дыр. Суперрадиация	155
§ 8.2. Глобальная структура поля пробного заряда в пространстве-времени вечной черной дыры.	160
§ 8.3. Сдвиг собственной энергии заряженной частицы в поле черной дыры.	166
§ 8.4. Взаимное превращение электромагнитных и гравитационных волн в поле заряженной черной дыры	169
§ 8.5. Черная дыра во внешнем поле. Взаимодействие черных дыр.	174
ГЛАВА 9. КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ. РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ.	187
§ 9.1. Роль квантовых эффектов в физике черных дыр.	187
§ 9.2. Квантовое рождение частиц во внешнем поле. Общая теория	194
§ 9.3. Усреднение по "ненаблюдаемым" состояниям. Матрица плотности	200
§ 9.4. Матрица плотности и производящий функционал для квантовых эффектов в черных дырах.	202
§ 9.5. Частные случаи.	213
а) Эффект Хокинга.	213
б) Индуцированное излучение.	214
в) Рассеяние когерентной волны.	215
г) Потеря энергии и углового момента черной дырой при квантовом излучении.	217
д) Энтропия излучения черной дыры.	218
е) Распределение вероятностей.	220
ж) Черная дыра в "тепловой бане".	220
з) Излучение заряженной вращающейся черной дыры. Зависимость излучения от массы, заряда и спина частиц.	223
ГЛАВА 10. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ	228
§ 10.1. Квазиклассическое приближение. Перенормированный тензор энергии-импульса.	228
§ 10.2. Выбор состояний и граничные условия для функций Грина	232
§ 10.3. $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{\text{ren}}$ и $\langle \varphi^2 \rangle^{\text{ren}}$ в пространстве-времени черной дыры	235

ГЛАВА 11. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР	251
§ 11.1. Черные дыры и термодинамика	251
§ 11.2. Поверхностная гравитация. Массовая формула.	252
§ 11.3. Четыре закона физики черных дыр	262
§ 11.4. Черная дыра как термодинамическая система	267
ГЛАВА 12. ВНУТРЕННЯЯ СТРУКТУРА ЧЕРНЫХ ДЫР	272
§ 12.1. Пространство-время и физические поля внутри шварцшильдовской черной дыры	272
§ 12.2. Неустойчивость горизонтов Коши внутри заряженной сферической черной дыры	275
§ 12.3. Неустойчивость горизонтов Коши относительно квантовоэлектро- динамических процессов.	279
§ 12.4. Неустойчивость горизонтов Коши внутри вращающейся черной ды- ры и общие замечания	284
ГЛАВА 13. ПЕРВИЧНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И КОНЕЧНАЯ СУДЬБА ЧЕРНЫХ И БЕЛЫХ ДЫР.	285
§ 13.1. Первичные черные дыры.	285
§ 13.2. Классическая и квантовая неустойчивость белых дыр.	286
§ 13.3. Что остается при квантовом распаде черной дыры?	291
§ 13.4. Элементарные черные дыры (максимоны). Виртуальные черные дыры и пенная структура пространства-времени	296
Заключение.	299
Приложение	300
Список литературы.	309
Алфавитный указатель иностранных авторов.	322

Игорь Дмитриевич Новиков
Валерий Павлович Фролов

ФИЗИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

Редактор *И.Г.Вирко*
Художественный редактор *Т.Н.Кольченко*
Технические редакторы *С.В. Геворкян, В.Н. Никитина*
Корректоры *Н.М. Кузьмина, Т.В. Обод*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 12438

Сдано в набор 28.02.86. Подписано к печати 19.06.86
Т-11583. Формат 60 х 90 1/16. Бумага офсетная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная. Усл.печ.л. 20,5
Усл.кр.-отт. 20,5. Уч.-изд.л. 22,79. Тираж 6000 экз.
Тип. зак. 141 Цена 2 р. 70 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25